

F.c.

2845

Közlemények a  
Szegedi Ferenc József Tudományegyetem Pedagógiai Lélektani  
Intézetéből.  
19. sz.

---

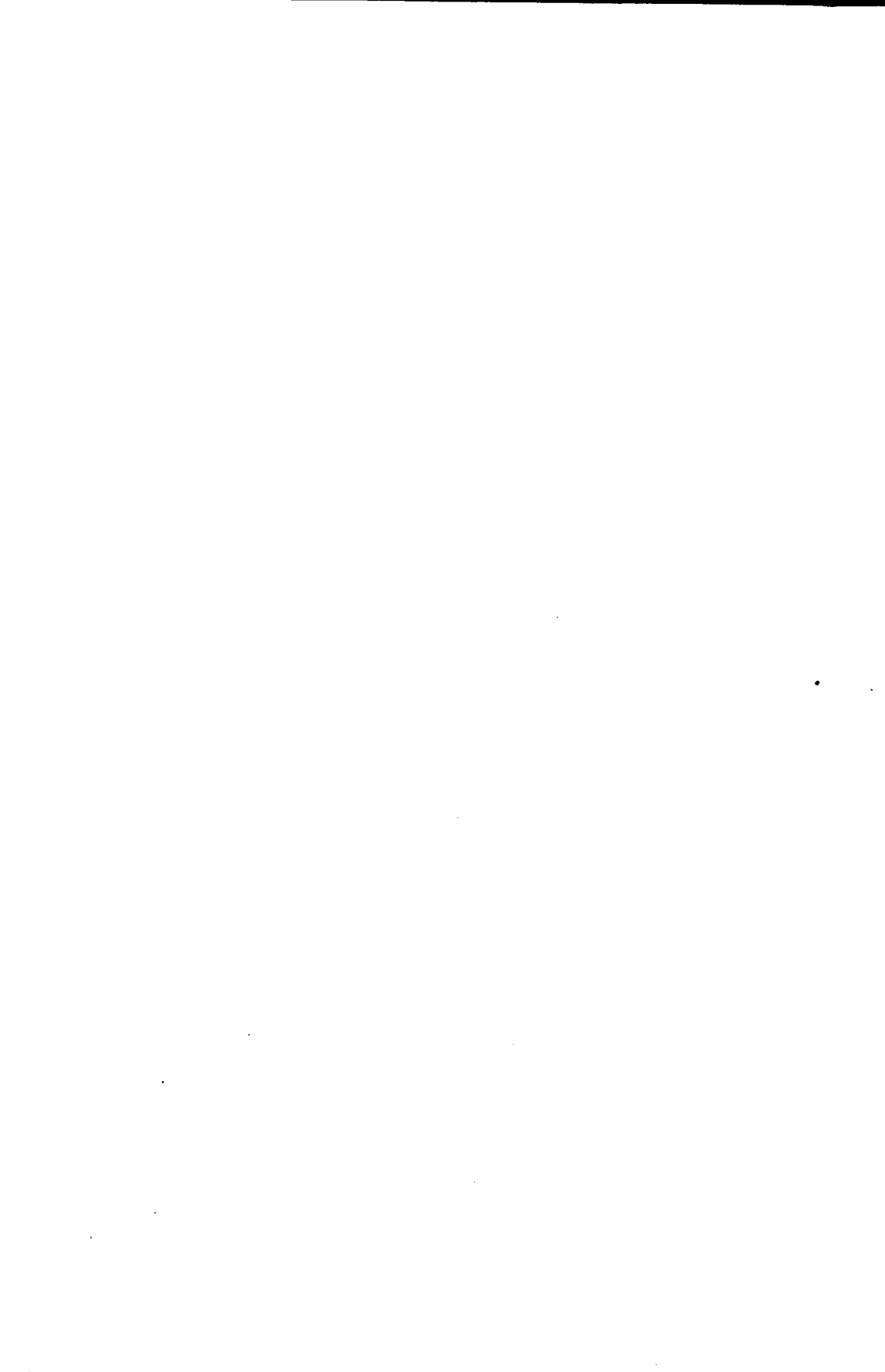
# A matematikai képesség lélektana

IRTA:  
MÁRKUS ARTUR



1 9 3 7.

ABLAKA GYÖRGY KÖNYVNYOMDAJA SZEGED, KALVARIA UCCA 14. TELEFON: 10-84





Közlemények a  
Szegedi Ferenc József Tudományegyetem Pedagógiai Lélektani  
Intézetéből.  
19. sz.

---

# A matematikai képesség lélektana

IRTA:  
MÁRKUS ARTUR



1937.  
ABLAKA GYÖRGY KÖNYVNYOMDAJA SZEGED, KÁLVARIA UCCA 14. TELEFON: 10-84

A szegedi m. kir. Ferencz József-Tudományegyetem  
Bölcsészet-, Nyelv- és Történelemtudományi Karához benyújtott doktori értekezés

Bíráló: *Dr. Várkonyi Hildebrand* egy. ny. r. tanár

Társbíráló: *Dr. Mester János* egy. ny. r. tanár



## **Bevezetés.**

Amióta az úttörők irányítása alapján a „pedagógiai lélektan” és az ezzel kapcsolatos tesztvizsgálatok fejlődésnek indultak, minden érdeklődés — tudósoké éppúgy, mint laikusoké — az emberi lélek eddig még kifürkészetlen új habitusai felé irányult. Méltán nagy lehetett az érdeklődés, hiszen az új tudományszak művelői nem kevesebbre vállalkoztak, mint az emberi lélek mélyén szunnyadó különféle diszpozíciók felkutatására. Megindultak az intelligencia, képesség- és tehetségvizsgálatok és a tesztvizsgálati módszerek is mindinkább a tökéletesedés felé haladtak. Nemsokára megindultak egy speciális képességre és tehetségre a matematikai képességre és tehetségre vonatkozó vizsgálatok is. Célunk az eddigi vizsgálatok áttekintése és a matematikai képesség mibenlétére vonatkozó tudományos elméletek bírálata és szintézise lesz. Arról lesz szó, hogy a nevelőket közelebbről érdeklő matematikai képesség és tehetség miben áll és miként fejlődik ki a növekvő ember lelkében. Mielőtt azonban az említett vizsgálatok és vélekedések ismertetésébe kezdenénk, röviden foglalkoznunk kell az intelligencia, képesség és tehetség fogalmainak meghatározásával és tulajdonságaival. Az egyes tudományos vélekedéseket és kísérleti vizsgálatokat az „Irodalom” című fejezetben feltüntetett nagyobb művek és kisebb értekezések alapján állítottuk össze.

---



## I. A matematikai képesség lélektana.

### 1.) Általános és speciális intelligencia.

Az intelligencia-fogalom különféle tudományos megfogalmazásában számos eltérést tapasztalhatunk: általában bizonyos nagyobb fokú szellemi felruházottságot, magasabb színvonalúságot, nem egyszer magasabb értelmi tudást szoktak rajta érteni; de sokan fejlettebb értelmességet és alkalmazkodó-képességet, sokan kombináló és produktív gondolkodási képességet értenek intelligencián, sőt vannak olyanok is, akik a fejlettebb testi kiműveltséget is az intelligencia velejárójának tekintik. Legnagyobbbrészt azonban az *értelmi* képességek valamiféle magasabb fokra emelkedett összegének tekintik, mely képességek örökölhethők — sőt ilyen örökölt képességek hiányában valaki nem intelligens maradhat — és nagy mértékben fejleszthetők.

A tudományos meghatározások között is nagy eltéréseket tapasztalunk, a szaktudósok más és másképen fogalmazták meg az intelligenciát; mindannyian megegyeznek azonban abban, hogy az intelligencia csupán *értelmi* jellegű diszpozíció és annak lényegében érzelmi és akaratí jegek nincsenek. Az intelligencia egyes lényeges értelmi jegyeinek szempontjából azonban már nagy eltérések mutatkoznak. Ebbinghaus szerint az intelligencia nem más, mint kombinálóképesség. Ziehen (Bleuler, Wundt) egyenesen kétségbe vonja, hogy általános intelligencia léteznék, szerinte az, amit intelligenciának nevezünk, nem egyéb, mint értelmi képességeknek egymástól függetlenül is fejleszthető kötege. Általában azonban a szaktudósok elismerik, hogy igen is *van* egy általános intelligencia, egy centrális értelmi képességrendszer. Meumann szerint az intelligencia nem más, mint bizonyos tulajdonságok és képességek rendszere, egyes értelmi képességek magasabb foka. W. Stern „Die Intelligenz der Kinder und Jugendlichen“ című munkájában hibáztatja Meumannt, hogy intelligencián csak egy bizonyos magasabb értelmi színvonalat ért és rámutat, hogy ez ugyanolyan hibákra vezethet, mint ha pl. a hőtanban csak azon jelenségeket vennénk figyelembe, melyek 0 fok fölötti hőmérsékleten mennek végbe. Stern szerint minden egyes egyén rendelkezik az intelligenciának bizonyos — csetleg igen alacsony — fokával. Szerinte az intelligencia egy általános, lelki alkalmazkodóképesség, az élet új feladataihoz és feltételeihez. Éppen ez az általánosság — mondja Stern —



különíti el az intelligenciát a speciális tehetségtől, mely utóbbinak lényeges vonása éppen az, hogy egyetlen részterületen felmutatott teljesítményekre szorítkozik. Intelligensnek azt nevezzük, aki a legkülönbözőbb feltételek között és új szituációk legkülönbözőbb területein szellemileg rátermett és a helyzetek által megkövetelt gondolatoperációkat célszerű módon vezeti be és viszi véghez. Az egyén intelligenciája tehát abban nyilvánul meg, hogy az adott új helyzetben rögtön feltalálja magát, azonnal a dolgok mélyére hat és a *megfelelő* utat választva *pusztán* a feladat megoldásához *szükséges* (sem több sem kevesebb) erőfeszítéssel oldja meg az új feladatot. Meg is jegyzi W. Stern: „Nem csak az nem intelligens, aki túlkeveset gondol ott, ahol több gondolkodással jobbat is elérhetne, hanem az is, aki túlsokat gondol ott, ahol kevesebb gondolkodással ugyanannyit, vagy jobbat érhetne el. A technika és ökonómia ismeretes alaptétele különösen áll az intelligenciára: lehetőleg nagy haszonsikert lehetőleg csekély erővel (Aufwand) elérni“.

Az intelligencia *általánossága és egységessége nem jelent egyformaságot*. Az intelligencia bizonyos szellemi diszpozíciók struktúrája, de nem — mint Ziehen állítja, — egymástól független és esetleg eltérő fejlődést is felmutató diszpozícióké; ezek a diszpozíciók szorosan együvé tartoznak, együtt fejlődnek, nagyjában mindig egyenlő fejlődési fokon állnak. Ezt a tényt egyébként a kísérleti adatok is igazolják. V. Kommerell így ír: „Abból a tapasztalati tényből, hogy egy jó fej szabály szerint minden szakmában meglehetősen egyenlő mértékben jó teljesítményeket mutat fel, azt következtethetem, hogy igen is beszélhetünk az emberi léleknek ilyen alaperejéről. Mert ha csak csupán egyes és egymástól független különleges képességek volnának, amelyek épp oly kevésbé függnének össze, mint pl. az emlékezőképesség és bátorság, akkor alig lehetne megmagyarázni, hogy miért találhatók ezen különleges képességek az egyénben legnagyobbbrészt megközelítően egyenlő magasságban. Természetesen ezzel nincs kizárva, hogy az intelligencia egyes esetekben egy vagy más irányban erősebben van kifejlődve; azonban létezése mint olyan, nem vonható kétségbe.“

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az intelligencia Stern megfogalmazásában alkalmazkodó-képességet jelent, és mint ilyen az állatban is megtalálható; ilyen értelemben tehát beszélhetünk állati intelligenciáról is. Ettől az intelligencia-fogalomtól (már t. i. az alkalmazkodóképességtől) el kell különítenünk azt a fogalmat, melyet értelmiségnek (vagy értelmességnek, nevezünk).

Kérdés, melyek azon összetevő képességek, melyek az intelligencia struktúrájának lényeges alkotó elemei. Évégből

legcélszerűbb Boda István munkája alapján (Bevezető a lélektanba) rávilágítani az intelligencia szerkezetére. Boda szerint az intelligencia (értelmiség) egy viszonylagos önnállóságot feltüntető egységes lelki képességrendszer; jól tagolódó lelki struktúra, az összelkisének végső átfogó egységében relative önálló egységes egész, melyet meg kell különböztetnünk az alkalmazkodóképességtől.

Ezen „általános intelligencia“ körébe a következő alapképességek tartoznak: elvonás, lényegmegragadás, értelmi elmélyülés, szintétikus egységbevonás, differenciáló és elemző képességek, kritikai érzék stb.

Ezen általános értelmi képességek közül igen fontos a *lényegmegragadó képesség*. Ez a képesség az, mely alkalmassá teszi az egyént arra, hogy a dolgok lényegét megragadja, azaz hogy felismerje a dolgokban azt a jegyet mely az illető dolgot éppen ezzel vagy azzá a dologgá teszi. A lényegmegragadó képesség egyébként igen különböző lehet és csak lassan fejlődik ki. Általában a 12 éves gyermek már felismeri a dolgok lényegét, sőt elvont fogalmakat is alkot. A lényegmegragadó képesség hiányos kiművelése folytán azonban nem egyszer a felnőttek is durva, értelmi hibáknak eshetnek áldozatul.

Az *értelmi elmélyülés* képessége a helyes megértésnek és gondolkodásnak másik alaptevően fontos eszköze. Ez az az általános képesség, melynek hiányában az egyén nem képes a dolgok mélyére hatolni, és ítélete felületessé válik; ennél fogva tehát még a lényegmegragadó képességnél is fontosabb. Boda szerint az elmélyülés „képesség a dolgoknak, viszonyoknak, problémáknak *egyre végsőbb* logikai alapok vagy természeti okok, vagy egyéb fajta értelmező elvek és alapok útján való értelmezésére.“

A *szintétikus egységbevonás* képessége szintén igen jelentős értelmi képesség. Boda szerint: „képesség a dolgok minél nagyobb körét vonni, minél szervesebb-szorosabb, de egyúttal minél gazdagabban és élesebben tagolt és rendezett egységbe“.

Az intelligencia-fogalom körébe tartozó ezen alapképességek különböző evrénekben különböző mértékben lehetnek meg — ennek alapján mondanak valakit intelligensnek vagy nem intelligensnek — egy azon egyénben azonban ezek a képességek nagyjában mindig ugyanolyan mértékben vannak kifejlődve.

Ezen fentebb definiált és tagolt „általános intelligencia“ mellett beszélünk még „speciális intelligenciákról“ is. Az értelmiség struktúrájához hozzátartoznak az u. n. *speciális viszonyító érzékek* és képességek is. Ezek — Boda szerint — nem egyebek, mint a dolgok között értelmünk számára lehet-

séges egyes kapcsolás-féleségek iránt való érzékek és kapcsoló képességek. Definíciója értelmében tehát annyiféle ilyen speciális viszonyító érzék és képesség lehetséges, ahányféle viszonylatot értelmünk a dolgok között föllelhet. Ilyen lehet pl. a matematikai viszonylatok iránt való érzék; tehát beszélhetünk „matematikai intelligenciáról” is! Ezen viszonyító érzékek az általános intelligencia-fogalom körébe tartozó alapképességtől már az egyes egyéneknben is nagyobb eltéréseket mutathatnak fel.

Az intelligenciának általában két főtípusát szokták megkülönböztetni: a *reaktív és spontán intelligenciát*. Ha az intelligenciát — Stern értelmezése alapján — mint az új életviszonylatokhoz való gyors és biztos alkalmazkodás képességét tekintjük, eljutunk az intelligencia reaktív típusához; reaktív intelligenciának azt nevezzük, melynek valamiféle indításra van szüksége, hogy működésbe jöjjön. Megvárja, amíg a feladatok és problémák felmerülnek és akkor reagál rájuk a benne rejlő szellemi erőök működésbehozatala által. A spontán intelligencia ezzel szemben élénk értelmességet jelent: nem várja meg — mint Stern mondja „Die Intelligenz der Kinder und Jugendlichen” című munkájában — míg szellemi erőit külső indítékok működésbe hozzák, hanem magától működésbe hozza azokat. A spontán intelligencia problémákat él át, terveket vet fel és ott is, ahol külső lökésre jön működésbe, nem marad meg a pusztá reakciónál, hanem a burkolt gondolatmenetet továbbépíti és továbbfejleszti.

Az intelligencia tehát alapvető lelki diszpozíciók struktúrája s mint ilyen örökölhető. Az örökölhetőség kétségtelen és kísérleti tények is igazolják: hiszen a tapasztalat is azt mutatja, hogy intelligens szülők gyermekei a legnagyobb valószínűség szerint szintén intelligensek (és ez áll az ellenkezőjére is).

Az intelligencia azonban csak *lassan fejlődik ki*. Az intelligencia fogalmi körébe tartozó alapképességek már a gyermekkorban megtalálhatók: a kis gyermek kérdezgetései, okoskodásai mind intelligenciáját fejlesztik s nem egyszer meglepődünk a gyermek nem várt okos feleletein. Az intelligencia fejlődésének egyik legfontosabb ideje a 9—12 év: a gyermek logikai gondolkodása erős fejlődésnek indul, lassan már az elvont fogalmakat és tételeket is jól felfogja és erős fejlődésnek indul a lényegmegragadó képessége is. A serdülés kora erős befolyással van az intelligencia fejlődésére, de nem akasztja meg azt; az ifjúkorban pedig hatalmas lendületet vesz, főleg a kritikai készség és az értelmi elmélyülés fejlődik erősen. A fejlődésmenet is természetesen attól függ, hogy milyen diszpozíciókkal született a gyermek: ezek a diszpozíciók megfelelő külső ráhatással igen kedvező irányban



fejleszthetők, de ilyen diszpozíciók hiányában az intelligencia a tudás növelésével nem pótolható. Jól jegyzi meg egy amerikai pszichológus: „az az intelligencia, amelyre akkor van szükségünk, ha *tudás nélkül* akarunk az életben boldogulni.” (Hylla: Testprüfungen der Intelligenz, 175. o.)

Fontos kérdés, hogy *az egyes speciális képességek milyen viszonyban állanak az általános intelligenciával*. Ezt a kérdést az intelligencia-vizsgálatok döntik el; ezen viszonyok alapján dönthetjük el egyes képességek izoláltságának kérdését is, amennyiben az általános intelligencia fokától többé kevésbé függetlenek. Jelen tanulmány feladata az, hogy ezen összefüggést a matematikai képességre vonatkozólag tisztázza. Előbb azonban a képesség és tehetség fogalmáról kell néhány szót szólnunk.

## 2. Képesség és tehetség.

A képesség fogalma általános fogalom és így nincs is pontosan körülhatárolva. A magyar nyelvben is több kifejezést találunk, melyek a képességgel rokon fogalmat jelölnek meg: mint diszpozíció, hajlam (ösztön), készség, tehetség; mindezek között csupán fokozati és árnyalati különbségek vannak. A német nyelv különösen gazdag ezen árnyalatok kifejezésében: Anlage, Befähigung, Veranlagung, Disposition. Fähigkeiten, Begabung, mind ugyanazon fogalom fokozati különbségeit jelölik meg.

Képességen általában — Weszely Ödön szavaival (A korszerű nevelés alapelvei) — működésbeli lehetőséget értünk. Maga a képesség tehát nem működés, csak működésbeli lehetőség. Ilyen értelemben tehát egész sereg képességről beszélhetünk: különböző testi és szellemi képességeink mind megannyi működésbeli lehetőséget jelentenek.

A képesség nem jelent normálison felülit. Mindenki rendelkezik bizonyos képességekkel, melyek fejleszthetők, de gátolhatók is. Beszélhetünk velünk született és szerzett képességekről. Kétségtelen, hogy a képességek öröklődnek és így valóban vannak velünk született képességek. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy az elődök összes tulajdonságait mint képességeket átszármaztatják az utódokra, hanem csak azt, hogy az ember bizonyos működésbeli lehetőségeket örökölt át, melyek a legkülönbözőbb fokban és irányban fejleszthetők.

Itt csupán az értelmi képességekről van szó; ilyen értelmi képességekkel találkoztunk már az intelligencia-fogalommal kapcsolatban. Az emberben rejlő értelmi képességek igen különbözők lehetnek és különböző fokot érhetnek el. Aki-

ben a három alaptevő funkció: az önfenntartás, önkifejtés és a környezetbe való beilleszkedés (Weszely) funkcióihoz. szükséges képességek megvannak, azt *normálisnak* nevezzük. Megtörténhetik, hogy bizonyos egyéneknél ezen képességek közül egyik-másik hiányzik, tehát képtelen az alaptevő funkciók elvégzésére; az ilyen egyént *szubnormálisnak* nevezzük. Megtörténik azonban az is, hogy akár az alapképességek, akár bizonyos speciális képességek egyes egyéneknél fokozott mértékben fellelhetők, az ilyen egyént *szupernormálisnak* vagy *tehetségesnek* nevezzük.

A tehetség tehát a képesség magasabb foka. Amíg a normális ember általános képességei folytán az életben feltalálja magát és kitűnően tud alkalmazkodni az adott helyzethez (megállja a helyét) ennél azonban nem viszi tovább, addig a tehetséges ember a dolgok sokféleségében új viszonyokat pillant meg és a tehetségének megfelelő területen produktivitásra is képes. A produktivitás fontos jellemző megnyilvánulása a tehetségnek, de ezt természetesen nem szabad teljesen általánosságban értelmezni, hanem azt értjük rajta, hogy a tehetséges egyén valami „eredeti” hoz létre. Az ilyen eredeti alkotás vonatkozhatik — Révész Géza szavaival élve (A tehetség korai felismerése) — önálló eszmének vagy más kifejezett gondolatnak megfelelőbb kifejezésére, egy megoldásnak új, szerencsésebb, több kapcsolatot teremtő változatára.

A tehetség megállapításánál tehát óvatosan kell eljárni: a gyermekben ugyanis gyakran túlbecsülik a kifejlődött képességeket és tehetséget vélnek látni benne akkor, mikor csak a képességek csak reprodukív irányúak és így hiányzik belőlük a tehetségre jellemző produktivitás.

A tehetségesség megnyilvánulásának első alapvető kritériuma az intelligencia. Általános tapasztalat ugyanis, hogy — két jelentős kivételtől egyelőre eltekintve, — a speciális tehetségek fejlődése egyenes arányban áll az általános intelligencia fejlődésével. Jellegzetes vonása még a tehetséges egyénnek az intuición és a spontaneitás, amelyek már kora gyermekkorban megnyilvánulnak és következtetni engednek a gyermek általános tehetségességére. Segíthet még bennünket a gyermeki tehetségesség megítélésében a gyermek érdeklődése is, bár az érdeklődés hiányából általában még nem szabad a tehetségesség hiányára következtetnünk. A tehetség biztos megállapítása azonban a gyermekkorban még nem sikerül; az egyes speciális tehetségek ugyanis a legkülönbözőbb időben és általában csak az ifjúkorban nyilvánulnak meg félreismerhetetlenül. A gyermekkorban a tehetség csupán reprodukív jellegű és produktivitás csupán az ifjúkor lezárta után jelenkezik.

Az egyes szellemi képességek és tehetségek kifejlődésére

vonatkozóan Révész Géza hoz fel érdekes adatokat. (A tehetség korai felismerése.)

A *képzőművészeti* tehetség igen ritkán nyilvánul meg az ifjúkor előtt és a valódi talentum csak későn bontakozik ki. Pl. Dürer tehetsége és művészi egyénisége csupán 21 éves korában nyilvánul meg először, igazi nagy alkotásai pedig 27 éves korában látnak napvilágot. Raffael és Michelangelo nagy művészi tehetsége 25. éve után bontakozik ki teljes pompájában. Nem ritka azonban az az eset sem, midőn a képzőművészeti tehetség csupán a meglett férfikorban bontakozik ki, mint pl. Tizian esetében, aki első nagy művét 40 éves kora után alkotta.

Az *irodalmi* tehetség még később bontakozik ki mint a képzőművészeti. Néha ugyan már az ifjúkor második felében is megtaláljuk az irodalmi tehetség első nyomait, de igazán ez a tehetség is csak az ifjúkor végeztével bontakozik ki. Petőfi igazi nagy tehetsége 20. életéve után, Vörösmarty művészete szintén csak a 20-as évek közepén alakul ki. Arany igazi költői egyénisége — mely a Toldiban nyilvánul meg először — csak 30 éves korában bontakozik ki. Goethe és Schiller nagy művei is csak 23—25 éves korukban jelennek meg. Shakespeare igazi nagy drámaírói tehetsége csak 35. életéve után nyilvánul meg, Dante pedig Divina Comediáját 48 éves kora után alkotta.

A *tudományos* tehetség még az irodalmi tehetségnél is később fejlődik ki, ez azonban csak egészen természetes, hiszen csak az ifjúkor végén alakul ki az egyénben a tudományok összességének képe és lesz alkalmassá arra, hogy a tehetségének megfelelő tudományos területen produktív irányban fejthesse ki képességeit.

Két nevezetes kivételt kell azonban megemlítenünk: a *zenei* és a *matematikai* képességet és tehetséget. Ez a két tehetség rendkívül korai megnyilvánulásával nem egyszer bámulatba ejti a szülőket, midőn gyermekükben az már nem egyszer a serdülőkor elején megnyilvánul. (Révész Géza: A tehetség korai felismerése.)

A zenei tehetségre jellemző, hogy fellépése úgyszólván szükségképen az ifjúkorban történik. Amíg a képzőművészeti és irodalmi tehetségeknél a legnagyobb ritkaság, ha ezek a gyermekkorban jelentkeznek, a zenei tehetségnél éppen az a ritkaság, midőn az csupán az ifjúkor végén jelentkezik. A zenei képesség a gyermekkorban inkább csak mint virtuozitás jelentkezik és csak később alakul ki az alkotó tehetség; de még így is a művész termelő tehetségének, stílusának, egyéniségének teljes kialakulása is az ifjúkorban játszódik le. Bach már kora ifjúságában komponál; Händel reproduktív képessége már 8 éves korában mutatkozik és 11 éves korá-



ban operát ír. Haydn reproductív tehetsége is igen korán megnyilvánul, produktív tehetsége csak a 17. éve körül bontakozik ki, Mozart 11 éves korában szintén operát ír és 29 éves korában kezdi írni világhírű operáit. Beethoven, Mendelssohn és Schubert egyaránt 11—13 éves korukban már tanújelét adják zenei tehetségüknek. Talán egyedül Wagnér kivétel, aki csak 20 éves korában kezd alkotólag fellépni és híres operáit a 30-as éveiben írja meg.

Még érdekesebben alakul ki a *matematikai* képesség és tehetség, melyet a zeneitől az a tény különböztet meg a legvilágosabban, hogy míg a zenei tehetség korábban mutatkozik de lassabban fejlődik, addig a matematikai tehetség kialakulása gyorsabb és elmondható, hogy a matematikai tehetség az, mely az összes művészi és tudományos tehetségek közül a legkorábban fejlődik ki.

A matematikai tehetség ilyen korán való kifejlődése rendkívül csodálatos tény. Annál csodálatosabb minthogy a tehetség fejlődésének legfontosabb korszaka oly időre esik, melyben az ifjútól mindent inkább váránk, mint azt, hogy a legabsztraktabb dolgok iránt érdeklődjék és a legszigorúbb módszerek művelésében lelje kedvét (Révész). Tényleg meglepő, midőn a serdülő gyermek a legnagyobb érdeklődéssel old meg feladatokat és nem elégszik meg a matematikai módszerek egyszerű megértésével, hanem azokat önállóan akarja felhasználni és a legkülönbözőbb esetekre alkalmazni. A kiváló nagy matematikusok tehetsége mind 16 éves koruk előtt nyilvánult meg és a legnagyobb kivételek közé tartozik, ha egy matematikus tehetsége csak 20-as éveiben bontakozik ki. Pascal 18 éves korában írja meg nevezetes dolgozatát a kúpszeletekről. Newtonnál is korán nyilvánul meg a nagy matematikai tehetség és 20-as éveiben írja meg híres felfedezéseit az infinitezimális számításról és a gravitációról. Euler már 16 éves korában óriási hírnévre tesz szert; Gauss pedig 19 éves korában megírja híres tételeit és 21 éves korában mint kora legnagyobb matematikusát emlegetik. A magyar Bolyai János is 21 éves korában fedezte fel híres geometriáját (Révész).

A zenei és matematikai tehetség ezen igen korai fellépésének okait a zene illetőleg matematika természetében kell keresnünk: mindkét terület ugyanis a legnagyobb mértékben független a tapasztalattól. A matematikai tehetség gyors kifejlődésének okairól egyébként a továbbiak során még bőven fogunk értekezni.

A lélektan tudománya több megállapítást tett már képességek és tehetségek örökléséről. Hogy a tehetség öröklődik, aziránt semmi kétség nem forog fenn: általánosan elismert tény, hogy a gyermek tehetségét szüleitől, vagy vala-

mely korábbi elődétől örökli. Biológiai szempontból tartott érdekes előadást dr. Szondi Lipót a tehetségről a „Magyar gyermektanulmányi és gyakorlati lélektani társaság” pszichológiai szemináriumában. Szerinte a tehetség megjelenése a családban nem véletlen műve, hanem minden tehetségnek szélesen megalapozott vérségi gyökere van. Ezek szerint a kiváló tehetség éppúgy öröklődik, mint a gyengeelméjűség. Hivatkozik Peters-re, kinek vizsgálatai kiderítik, hogy a gyermekek iskolai osztályzatai annál jobbak, minél jobbak voltak a szülők és nagyszülők iskolai teljesítményei. Foglalkozik még dr. Szondi az extrém tehetségek biológiai értékével is és arra az álláspontra jut, hogy biológiailag a tehetséges éppolyan mínuszt jelent egy népesedésben, mint a fogyatékos elméjű. Szerinte a nagy tehetség a társadalomnak szociális, filozófiai, művészi értelemben vett ideális formája, de biológiailag nem az.

A tehetség legmagasabb foka a *lángelme* (genie). A lángelmében a rá jellemző speciális képességek még magasabb fokban vannak kifejlődve, mint a tehetségesben és főleg a rendkívüli mértékben megnyilvánuló produktív tevékenység az, mely a lángelmét a normális egyének fölé emeli.

### 3.) Matematikai képesség és tehetség.

Hogy egyáltalában létezik matematikai tehetség, azt általában nem vonják kétségbe. Általánosan elterjedt és régóta hangoztatott vélekedés, hogy a matematikai diszciplínában csak az viszi valamire, akinek *érzéke* van hozzá; a középiskolában csak a matematikai érzékkel megáldott tanuló ér el jó eredményt, a többi nem viszi elégségesnél följebb. Egyetemi matematikai tanulmányt pedig csak az folytathat, kinek határozott tehetsége van hozzá. Mindebben sok az igazság, de rá kell mutatnunk a laikus vélekedések egy-két hibájára.

Tény az, hogy csak a matematikai érzékkel megáldott tanulók viszik valamire a matematikában és az is tény, hogy matematikai tehetség nélkül bajos dolog volna magasabb matematikai tanulmányokat folytatni. A műegyetemi mérnökhallgatók pl. — kiknek nagy hajlamuk van műszaki dolgok, gépstruktúrák, rajzolás stb. iránt, — nem egyszer az ott szükséges matematikai fogalmak hiánya miatt kénytelenek abbahagyni tanulmányaikat, mivel nincs matematikai érzékük. A matematikai érzékkel nem rendelkezők nem egyszer valószínűs ellenkezéssel viseltetnek a középiskolai matematikai oktatással szemben és különösen oly szülők, kik maguk sem hoztak sok jó emléket a középiskolából matematikai ta-

nulmányaikat illetően, erőteljesen ellenzik a — matematikailag szintén tehetségtelen — gyermekeikre is kötelező matematikai oktatást.

Egy másik tagadhatatlan tény az, hogy a matematika mégsem csupán a tehetségesek számára kigondolt diszciplína; a matematika a középiskolai formális képzés elengedhetetlen eszköze és csak a tudományos pedagógiai gondolkodástól távol állók látnak benne értelmetlen és semmi eredménytelenséggel járó, az életben föl nem használható ismerethalmazzal. A középiskolai matematikai diszciplína nem olyan természetű, hogy azt normális intelligenciával rendelkező egyén legalább elégséges eredménnyel el ne sajátíthatná. De még a matematikai képességgel nem rendelkező elfogulatlan egyének is elismerik a matematikai tehetségnek az általános intelligenciától való izoláltságát és ez az elismerés legnagyobbbrészt abban nyilvánul meg, hogy a matematikailag tehetségesekre ezek bizonyos elismerésteljes csodálattal tekintenek: egy jogi, orvosi, vagy más filozófiai tanulmány számukra megközelíthetőnek látszik, hiszen ezen tudományágban bárki előrehaladhat, kinek bizonyos nagyobb fokú általános intelligencián kívül kitartó szorgalma is van, de egy matematikus tudománya ezek számára mintegy elérhetetlen és megközelíthetetlen szellemi magaslatot jelent. Ők nem gondolnak arra, — és épen ez a matematikai tehetségesség következménye — hogy ami számukra akárminő erőfeszítéssel sem fölfogható holt ismeretanyag, az a matematikus számára csekély energiával is elsajátítható, eleven, hajlékony matéria, mely kérlelhetetlen logikájával és megcáfolhatatlan voltával a matematikus számára a legmagasabb szellemi élvezetek forrása lesz. Ugy gondoljuk, hogy egy matematikailag tehetséges egyén sokkal kisebb pszichés energiával éri be saját tudományterületén, mint akár a historikus, filologus vagy természettudós.

De van még egy hibája a laikus vélekedésnek és ez: sokan nem tudják, mi is tulajdonképpen a matematikai képesség és tehetség; jobban mondva nem tudják, melyek azok az összetevők, melyek a matematikai képesség strukturáját alkotják és hogy ez a képesség a vele rokonságban állókkal milyen viszonyban áll. Szeretik általában a matematikai képességet a *számokra való emlékezőtehetséggel és a számolótehetséggel* azonosítani. Némelyek szerint a később matematikailag tehetséges egyének gyermekkorukban igen jó szám-émlékezéssel bírtak; sokan ezt már a matematikai tehetség megnyilvánulásának tartják. Az persze nincs kizárva, hogy a számémlékezéssel megáldott gyermek matematikai tehetség lesz, de az előbbi nem *oka* az általános matematikai képességnek és utóbbira még előbbiből nem lehet következtetéseket levonni. Az is kétségtelen, hogy a számolóképeség sem esik



össze mindig a matematikaival, de ez nem is csodálatos, hiszen az alpműveletek mint számolási funkciók egészen más természetűek, mint az átfogóbb logikai gondolkodásmódot igénylő matematikai műveletek. Meg kell vizsgálnunk tehát, hogy milyenek azok az egyes lelki képességek, amelyek mint összetevők a matematikai képesség struktúráját alkotják.

Ami a lélektani kutatásokat illeti, a legtöbb idevonatkozó munka 1910 és 1913 között jelent meg, de azóta is állandóan újabb munkálatok láttak már napvilágot.

Möbius 1907-ben „Über Anlage zur Mathematik“ című értekezésében fejti ki a matematikai képességről alkotott véleményét. Szerinte a matematikai tehetség az atyától öröklődik és jó oktatás a tehetség kifejlődését erősen meggyorsíthatja. Nem egyszer más tehetségekkel együttesen jelenik meg, legnagyobbbrészt a fizikai és kémiai tehetséggel. Möbius — és vele együtt több más kiváló pszichológus — a matematikai tehetséget kettős ágazatúnak tartja és megkülönböztet aritmetikai és geometriai tehetséget. Ugy gondolja, hogy a kettő együtt jár és elképzelhetetlennek tartja, hogy egy geometriai tehetséggel rendelkező egyén egyszerismind aritmetikai tehetséggel ne rendelkezne. Azt is észreveszi, hogy nem egyszer kiváló számolótehetségek kevés matematikai tehetséggel rendelkeznek.

Möbius a matematikai tehetség lényegét a számviszonyok iránti értelemben látja; ehhez azonban éles elmének, ítélőképességnek, jó emlékezőtehetségnek, kombinálóképességnek kell járulnia. Érdekes Möbiusnak az a megállapítása, miszerint a matematikailag tehetségesek homlokukon sajátos ismerető jegyet viselnek, amennyiben homlokzatuk bal szemöldöke felett kidomborodás mutatkozik.

Betz „Über Korrelation“ (1911) című értekezésében foglalkozik e problémával és felveti a kérdést, elképzelhető-e intelligens ember matematikai értelmesség nélkül is? Azt mindenestre megállapítja, hogy az iskolai matematikára nézve — melynél logikai következtetések ügyes egymásmellé sorolásáról és algebrai kifejezések átalakításáról van szó — minden intelligens embernek kell ilyen képességekkel rendelkeznie. Ő azonban a matematikai tudományt elválasztja az iskolai matematikától és megállapítja, hogy a matematikai tudományhoz már meghatározott és magasabb adottságra van szükség. Szerinte ez az adottság a felhasznált eljárások plauzibilissé tételében, a kiválasztott út helyességének gyors felfogásában nyilvánul. A matematikailag tehetségtelen számára a formulák csak szimbolumok, a tehetséges egyén azonban kivizsgálja, hogy miért éppen a megállapított képletek és bizonyítások voltak választandók. Az iskolai matematikánál még sok függ az akarattól, de ha arról van szó, hogy

önálló matematikai vonatkozásokat találjunk, akkor a matematikailag tehetségtelenben hiányzik a képesség és a legjobb akarát sem segít rajta. Egyébként Betz is megkülönböztet aritmetikai és geometriai tehetséget.

*Huther* (1910) úgy vélekedik, hogy a matematikai tehetség tulajdonképpen a gondolkodási folyamatok könnyű végrehajtásában nyilvánul meg.

Foglalkozik a matematikai gondolkodással *Brown* is (1910-ben), aki angol iskolásfiúkon végzett kísérleteket.

A matematikailag tehetségesek két típusra való tagoltságát (geometriai és aritmetikai) megállapítja *Poincaré* is (1914). Ő mindkét irány tehetségeire nézve a következő ismertetőjeleket állapítja meg: kiváló emlékezőtehetség, erős koncentráló képesség és az u. n. matematikai intuición. Ez utóbbi teszi képessé a matematikust arra, hogy egy pillantással áttekinthesse valamely bizonyítási processzus egészét anélkül, hogy egyes elemek kifelejtésétől kellene tartania.

A matematikai tehetség lényegét kutatja *Mercante* (1904). Szerinte a matematikai képesség bizonyos reakciós időkkal fordított viszonyban áll. A matematikai fenomén egy olyan integrál, mely akusztikai vagy vizuális percepcióval kezdődik és motorikus aktussal fejeződik be. Egy komplikált belső komparációs folyamat után, amely folyamat absztrahálás, generalizálás és kombinálás. Mindezekhez még a matematikai feladatok megoldásánál bizonyos pontosságra és gyorsaságra van szükség.

*Vaerthing* (1921) szerint a matematikailag tehetséges tanuló jellegzetes ismertetőjele abban nyilvánul meg, hogy a kitűzött célt minden körülmények között, minden nehézség ellenére megtartja és természete ellen van, hogy egy feladatot megoldatlanul hagyjon. Fontos szerepe van *Vaerthing* szerint a feladatok megoldásánál a koncentrálóképességnek; a szorgalomnak látszó szilárd problémamegragadás tulajdonképpen nem más, mint a receptív szorgalom ellenpólusa.

*Katz* (1913) azt hiszi, hogy nem beszélhetünk tipikus antimatematikus tehetségekről, mint ahogyan nem beszélhetünk tipikus antifilológiai vagy antihistórikus tehetségről sem. Szerinte a matematikailag tehetségtelenben hiányzik az érdeklődés, vagy pedig ellenszenvvel viseltetik a matematika iránt. *Katz* különbséget tesz tehetség és érdeklődés között és egy individuum teljesítményének értékelésénél nagyobb fontosságot tulajdonít az érdeklődésnek, mint a tehetségnek.

*Ziehen* „Über das Wesen der Beanlagung“ (1918) című értekezésében foglalkozik a matematikai képességgel. Szétválasztja a geometriai és aritmetikai képességeket és azt állítja, hogy a kettő nem jár minden körülmények között együtt. Ő a geometriai képesség összetevőiként a következő

tényezőket említi: 1. téremlékezés és pedig nem annyira vonal és szögnagyságok, mint inkább összetett helyzetviszonyok iránt; 2. térfantázia; 3. térbeli komplexió és komparáció (szintézis és alakfelfogás); 4. produktív kombináció; 5. logikai gondolkodás (ezt Ziehen a geometriai teljesítmények szempontjából elengedhetetlennek tartja); 6. a figyelem koncentrációja. Az aritmetikai képesség összetevőiként a következő tényezőket sorolja fel: 1. elvont, nem szemléleti emlékezés 2. absztrakció (pszichológiai értelemben); 3. logikus gondolkodás (lényeges jelentőségű); 4. intellektuális figyelem koncentrációja; 5. receptív kombináció és végül 6. kreatív kombináció. Ziehen ezenkívül mindegyik képesség vizsgálatára közöl egynéhány tesztpróbát. Fontos megállapítása még Ziehennek, hogy a számolóképeség és a számemlékezés lényegtelen funkciók a matematikai képesség esetében és megemlíti, hogy a számológépművészek csak csekély hányada tehetséges matematikailag is.

Részletesen foglalkozik a matematikai tehetség összetevőivel Ruthe „Über mathematische Begabung“ című értekezésében. Foglalkozik a matematika nevének görög eredetével, majd a matematikai tudományrendszer jellegzetes sajátágaival. A matematikus fontos lelki képessége az absztrahálóképesség, de nem ez teszi egyedül a matematikust. A matematikai gondolkodás tulajdonképpen mozgatói azon viszonyfogalmak amelyek egy független és függő változó függvényszerű összefüggését megvilágítják. A matematikus függvényszerűen gondolkodik: számára a szám és térképek nem merevek, hanem növekvők és csökkenők. A felismert összefüggéseket grafikus ábrázolás által kell az értelem számára szemléletessé tennie, mert — és itt Kantot idézi Ruthe — „a fogalmak szemléletek nélkül üresek“. A matematikai tehetség lényeges alkotóeleme a térfantázia is. A matematikai kutatómódnak szintén jelentős részfunkciója a zárt deduktív bizonyítás. Másképpen: a tanulónak hosszabb levezetésekkel kell megértenie, áttekintenie, nem mechanikus módon megrögzítenie, hogy megtanulja rokonésekre alkalmazni. A matematikus lelki struktúrájának alkotóeleme még az intuitív megérzés és találékonyság; és itt jöhet szóba az, ami a matematikust a művészhez teszi hasonlóvá: a spontaneitás, az alkotóképesség, produktivitás, melyet már a tanulók iskolai feladataiban is felfedezhetünk. Ez a találékonyság is a matematikai tehetség egyik komponense.

Végül megemlíti még Ruthe, hogy a matematikusnak jelentős mértékben szüksége van arra az akarati tényezőre, melyet a koncentráció szóval jelölünk; arra a szándékos figyelfeszültségre, mely a zavaró mellékingereket és mellékes képzeteket távoltartja, amely megakadályozza az értelem elka-

landozásait és váratlan nehézségek esetén sem engedi azt a pályáról eltéríteni. Ruthe azután kísérleti vizsgálatokat is közöl, melyekre később részletesen kitérünk.

Szintén részletesen foglalkozik a matematikai tehetség részfunkcióival *Kommerell* „Über mathematische Begabung” című értekezésében. Szerinte a matematikus első fontos alképessége a logikus gondolkodás képessége; az a képesség, melynek birtokában a matematikus a deduktív és induktív módszereket helyesen alkalmazni tudja, az ilyen logikusan felépített gondolatsort másoknál könnyen követni tudja és azokat összefüggésükben megérti.

Másik főképessége a matematikusnak az absztrahálóképesség; az a képesség, melynek birtokában az egyén a tapasztalati vagy képzeleti komplexumból bizonyos jegyeket elhagy vagy gondolatban eltüntet és csak azokra szorítkozik amelyek az illető szemléleti módra nézve éppen fontosak. A matematikai tudományban az absztraháló művelet főképen arra irányul, hogy csupán a nagyság és mértékviszonyok jönnek tekintetbe, míg a minőségi különbözőségek elmaradnak. Maga a számfogalom megalkotása is egy igen jelentős absztrakciófolyamat; ezen különböző nemű absztrakciónak képzése és a velük való dolgozás a matematikai gondolkodás jelentős tényezője.

Ezzel azután eljutottunk a matematikusnak egy jelentős képességéhez, a kombinálóképességhez. A matematikusnak ugyanis képesnek kell lennie arra, hogy téralakzatokkal, formátumokkal és függvényekkel operálni tudjon, viszonylatokat találjon köztük, azokat alakítsa és megérezze, ha azok között új összefüggések várhatók. Speciálisan a geometriai képességtípusra nézve fontos, hogy biztos térbeli szemlézőképessége legyen, tehát *vizuális tájékozottsággal* rendelkezzen és térbeli emlékképeit gyorsan és biztosan reprodukálni tudja.

A matematikusra nézve jellemző és értékes vonás az a figyelem, mellyel a valótlanságokra vigyáz és minden lehetőséget és következményt szorgalmasan átgondol. Ez a körültekintés és gondosság az, amely különösen az analitikust jellemzi, bár a geometer is rászorul. Végezetül szerepet játszik még az emlékezőképesség is, ami természetesen nem azt jelenti, mintha a matematikus kiterjedt tárgyi emlékezőképességgel kell hogy rendelkezzen (mint pl. a történésznek vagy természettudósnak), hiszen ebből a szempontból a matematikus az összes tudományozások művelői közül a leghalványabb helyzetben van. Ez az emlékezőtehetség inkább abban kell, hogy megnyilvánuljon, hogy a matematikus mindazon ismereteket, melyek birtokában van, mindenkor teljes terjedelmében készenlétben tartja, azaz, hogy ezen ismeretek

mindenkor a kellő pillanatban legyenek felidézhetők.

A pszichológusok egy része a számokra való emlékezés-sel és az elemi számolás képességeivel is foglalkozik, ezek általában megegyeznek abban, hogy a matematikai tehetség nem mindig egyszersmind számolótehetség is és a nagy számológépművészek legnagyobbbrészt matematikailag nem tehetségesek. *Lobsien* foglalkozott behatóan a számemlékezés és a számolási teljesítmények közötti viszonyokkal és megállapítja, hogy az elemi számolás nincs összekapcsolva a számokra való emlékezés energiájával, hanem más lelki képességek állnak vele mélyebb viszonyban. Ugyancsak *Lobsien* állapítja meg, hogy az elemi számolási funkcióknál majdnem kizárólag a hallási számemlékezés jön szóba. Egyébként *Katz* foglalkozott egy híres számológépművész, *Rückle* képességeivel és arra a meggyőződésre jutott, hogy *Rückle* számolási sikerei nem annyira rendkívüli emlékezőtehetségében, mint a számviszonyok felfogásában rejlenek.

Az amerikai szaktudósok vélekedését *Castiello*, a British Psychological Society tagja „*Lélekformálás*” című művében gyűjti össze.

Hogy a matematikai képesség csupán egy általános lelki működési képesség, vagy pedig képességek rendszere, etekintetben az amerikai pszichológusok véleménye eltérő. *Thorn-dike*, valamint *Stone* úgy gondolják, hogy a matematikában több különböző képesség jó működésbe. Ezzel szemben *Collar* úgy véli, hogy csupán egy általános képesség működéséről van szó.

*Castiello* pedagógiai szempontjából vizsgálja a problémát és a következő 3 kérdésre keres feleletet: 1. Milyen viszony áll fenn a matematikában gyakorolt képességek között? 2. Ha több ilyen képesség létezik, hogyan kell azokat kiképezni? 3. Vajjon pusztán mechanikus gyakorlás által elérhető-e ez a képzés? *Castiello* itt néhány amerikai pszichológus vizsgálataira hivatkozik és ezek által világítja meg a problémát.

*Overman* kutatásai alapján megállapítja, hogy az aritmetika formális képző értéke a módszertől függ, és azzal a módszerrel mutatta fel a legtöbb eredményt, amely lehetőséget nyújtott a tapasztaltak általánosítására. Megállapítja még, hogy a matematikában gyakorolt funkciókkal más funkcióknak együttműködése viszonyban áll az intelligenciával.

*Rugg* vizsgálata szerint az együttműködés szempontjából nemcsak az azonos funkció, hanem az azonos módszer is tekintetbe veendő. *Starch* kimutatta, hogy a fejszámolás nem növelte a számokra való emlékezőképességet, de a szorzási fejszámolás megjavította az összeadási, kivonási és osz-

tási fejszámolás képességét. Hasonló megállapításra jutottak *Knight* és *Poffenberger*. *Winch* megállapítja, hogy aritmetikai problémának megoldásából származó 150 százalékos előmenetel a logikus gondolkodás képessége szempontjából 30 %-os előmenetelt jelent.

Összefoglalva a szaktudósok véleményeit a matematikai tehetséget a következőkben fogalmazzuk meg:

*A matematikai érzék, képesség és magasabb fokon: tehetség oly összefüggő értelmi érzék és képességrendszer, melynek birtokában az egyén bizonyos mennyiségi viszonylatokat gyorsan és intuitíve felfog, a viszonyban álló mennyiségek függvényyszerű változását az egyén számára könnyen szemléletessé teszi, az elvont mennyiségre vonatkozó rövidebb-hosszabb levezetésláncok lényegét gyorsan megragadja és azokat bármikor nehézség nélkül alkalmazni tudja.*

Mindazok a képességek, amelyek az említett értelmi funkciók lefolyása közben működésbe jönnek, hozzátartoznak a matematikai képességrendszerhez. Legalapvetőbb képesség ezek között a mennyiségek közötti viszonyítás érzéke és képessége, azonkívül a függvényyszerű gondolkodás képessége, melynek hiányában a nem matematikus a matematikai vonatkozású gondolatsorokat vagy egyáltalán nem, vagy csak hosszabb fáradozás útján képes értelme számára világossá tenni; és amelynek birtokában a matematikus oly könnyen kiigazodik a gondolatláncok sokak számára hozzáférhetetlen és érthetetlennek látszó útvesztőjében. De mindjárt itt meg kell említenünk az u. n. matematikai intuiciót is, hiszen ez képesíti a matematikust arra hogy a mennyiségviszonyokat és függvényyszerű változásokat *könnyen* és *gyorsan* felfogja; a matematikai intuición hiánya sokakat képtelenné tesz az önálló és alkotó tevékenységre, amely a matematikai tehetségnek szintén fontos és jellegzetes vonása. Jelentős tényezője a matematikai képességnek a logikus gondolkodás képessége is, enélkül képtelen lenne a matematikus a tudományszakában oly gyakran előforduló levezetésláncok biztos megragadására és azok alkalmazására. De ide tartoznak még az absztraháló és kombináló képességek, nemkülönben az élénk térfantázia is.

Az aritmetikai és geometriai képességek szétválasztása nem okoz nehézséget, bár gyökeres szétválasztásukról szó sem lehet: a matematikai tudomány mindkét területén majdnem kizárólag azonos funkciókról van szó és a két rész annyira összefügg egymással, hogy a két képességterület egymástól való izoláltságról semmi körülmények között nem beszélhetünk. A kisebb-nagyobb eltérések okát az egyes részképességek fejlődésmenetének kisebb ingadozásában és a térfantázia fejlettségének különbözőségében kell keresnünk.

Nem tartozik azonban a matematikai képesség rendszerébe sem a számokra való emlékezés, sem az elemi számolás képessége. A számokra való emlékezőtehetség, úgy gondoljuk azonos a jó emlékezőtehetséggel. Az elemi számolásnál pedig nem jön működésbe a két nevezetes matematikai gondolkodási alapfunkció: a viszonyítás és a függvényszerű gondolkodás. Valóban nincs semmi csodálnivaló abban, ha kiválóan számoló gyermekekből soha sem lesz jó matematikus és megfordítva. Az elemi számolásnál igen nagy szerepe van az elmechanizálódásnak — hiszen az elemi iskolában elsajátított alapszámvetési módszerek tulajdonképpen mechanikusan végzett és olykor igen kevés gondolkodást igénylő számolási műveletek — a matematikában nincs helye a mechanikus munkának: aki mechanikus munkával, magolással véli matematikai tudását gyarapíthatni, az nagyon kevésre viszi. Az ilyen egyén számára ugyanis a megtanult képlethalmaz holt anyag marad: talán éppoly könnyen reprodukálja az  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$  képletet, mint az egyszeregy bármely sorát, de az általános háromszög problémáját soha sem fogja tudni megoldani.

A matematikai képesség egyénenként különböző fokban nyilvánulhat meg. Az ez irányban végzett kísérletek arra az érdekes tényre világítanak rá, hogy a matematikai képességnek a női nemnél egészen más a fejlődésmenete mint a férfiaknál. Azután más jellegzetes eltérések is mutatkoznak itt, amelyekről a továbbiak során még bőszégesen lesz szó.

Érdekes probléma még a képesség kifejlődésének problémája is, amelyről a kísérleti vizsgálatok ismertetése alkalmával még kimerítően óhajtunk szólni. Itt csak azt a problémát vetjük fel: felismerhető-e a gyermekben a matematikai képesség, ennek felismerhetőbb kibontakozása előtt; jobbanmondva következtethetünk-e bizonyos megnyilatkozásokból a később kifejlődő matematikai képességre és tehetségre? Nem egyszer tapasztalhatunk ugyanis a kisgyermek részéről páratlan érdeklődést a számok iránt, sok gyermek kiváló buzgósággal sajátítja el az elemi iskolai számtan anyagot. Tény az, hogy a viszonyító érzék első jeleit már itt megtalálhatjuk. De mindezekből még korai lenne biztos következtetéseket levonni: sokszor előfordul, hogy minden számítás ellenére a jól számoló és éleselméjű gyermek nem rendelkezik később matematikai tehetséggel. Ennek a tehetségnek a kibontakozását csak akkor várhatjuk, ha a gyermek már megismerkedett bizonyos alapvető matematikai foglalkozásokkal. A középfokú és középiskolák első matematikai óráin azután felfedezhető a matematikai tehetség csírája, amely ettől a pillanattól kezdve rohamos fejlődésnek indul.

Fontos probléma az is, miképpen fejlődik ki a matema-



tikai képesség és tehetség olyan korban, amikor más képességek még csak szunnyadnak és csak hosszú évek eltelte után indulnak fejlődésnek. Érdekesen világít rá a problémára Révész Géza „A tehetség korai felismerése” című értekezésében.

A matematikai tehetség korai kifejlődésének főokát Révész a matematika természetében találja. A matematika ugyanis a fejlődő ifjú tanulmányai közül az első oly tanulmány, melybe mélyebben behatolhat, itt látja először általános tudományos módszerek alkalmazását. A többi diszciplínában, legyen az történelmi, nyelvi, vagy természettudományos tanulmány, az ifjú csupán dogmatikusan előadott és inkább pedagógiai szempontok szerint rendezett ismeretanyagnak jut birtokába és az ifjúnak csak középiskolai tanulmányainak végeztével van módjában megismerkedni ezen tudományszakok természetével és módszereivel. Az ifjú a középiskolában nem is gondol arra, hogy az utóbb említett tudományszakokban problémákról is lehet szó. Ő percipiálja az eléje tárt ismeretanyagot és a problémák iránti érzék csupán később fejlődhet ki benne. Ezekkel szemben a matematikai tudománnyal, mint tiszta tudománnyal ismerkedik meg az ifjú. A matematika ugyanis csakis mint *tudomány* adható elő és itt először nyílik alkalma az ifjúnak tudományos módszerekkel és problémákkal megismerkedni. A matematikában az ifjú evidens igazságokkal ismerkedik meg és megmutatják neki, miként épül fel az egész tudományos rendszer egynéhány szigorúan definiált axiómán, megismeri miként lehet elemi ismeretek alapján magasabb matematikai megismerésre szert tenni. A tehetséges ifjában tehát igen könnyen fejlődhetik a tehetség, hiszen a tudományos matematikai vizsgálatokkal elég korán megismerkedhetik és akár saját maga is folytathat a tapasztalattal elsajátítottak alapján vizsgálatokat.

Révész azonban felvet még egy problémát: miért éppen a matematikai tehetség az *egyedüli*, amelynek korai kifejlődése úgy kitűnik az összes többi szellemi tehetségek közül? Érdekes ugyanis az, hogy más — pl. zenei vagy képzőművészeti — tehetség soha sem fejlődik ki olyan korán, hogy az ifjú produktumai megállhatnák a helyüket a mesterművek mértékével mérve; még akkor sem, ha egyébként megismerkedik az ifjú az illető tudományos vagy művészeti terület problémáival és vizsgálati módszereivel. Tehát még egy más különleges oka kell hogy legyen a matematikai tehetség korai kifejlődésének. Révész Géza ezt az okot a matematika természetének *logikai* vonásában találja meg. Ebből magyarázható meg az a tény, hogy a formális logikai fegyverzettel és a logikai viszonyok meglátásához szükséges adottsággal megáldott ifjú oly eredményeket tud felmutatni, amelyek

egyenesen a matematikai tudomány fejlődésére is hatással lehetnek. A matematikai logikai vonása abban nyilvánul meg, hogy axiomatikus jellege van, tételei apriori érvényesek, elméleteit alapelveit, melyekből a levezetések kiindulnak önmagából meríti: a matematika tehát *autonom* természetű és *független az élettapasztalattól*. Ebből magyarázható meg az a tény, hogy amíg a filozófus és művész fejlődése szoros összefüggésben kell hogy haladjon élettapasztalataival, addig a matematikai tehetség már akkor kifejlődhet, mikor az ifjú még csak igen kevés élettapasztalattal rendelkezik.

Most, miután behatóan foglalkoztunk a matematikai tehetség természetével, rátérünk azon kísérleti vizsgálatok ismertetésére, amelyek segítségével a matematikai tehetség létezésére vagy annak fejlődésére fényt deríthetünk. Előbb azonban általánosságban óhajtunk foglalkozni a tehetséget vizsgáló próbák (tesztek) természetével.

---

## II. Kísérleti vizsgálatok.

### 1.) A tesztekről általában.

#### A matematikai képességek tesztjei.

Az általános lélektan az emberi lélek elemi megnyilvánulásait vizsgálja, azokat az elemi lelki jelenségeket, melyek nagyjában minden egyes egyénnél azonosan nyilvánulnak meg, amelyek tehát általános lelki megnyilvánulások. Kutatási módszere a klasszikus kísérlet, mely nem egyszer műszereket vesz igénybe, tetszés szerint megismételhető és amelynél kimerítő exaktságu mérések is eszközölhetők.

A differenciális lélektan ezzel szemben nem boncolja fel elemeire a lelki jelenségeket, hanem azokat összefüggő struktúrákban szemléli; oly struktúrákban, melyek az egyes egyéneket a legnagyobb mértékben elválasztják egymástól; a differenciális lélektant éppen az egyéni különbségek érdeklik s főcélja az egyén egyéniségének mélyére hatolni. Vizsgálja az egyén intelligenciáját, speciális képességeit és tehetségeit, szóval olyan dolgokat, melyek az egyénekben a legkülönbözőbb fokban és összetételben fordulhatnak elő. Vizsgálatainál az u. n. *teszteket* alkalmazza: ezek pszichikus próbák, a kísérleti személynek különböző írásban vagy szóban feladott kérdésekre kell válaszolnia, bizonyos feladatokat kell megoldania. A tesztekkel a legkülönbözőbb lelki diszpozíciókat vizsgáljuk, mint: figyelmet, megfigyelőképességet, emlékező tehetséget, kombinálóképességet, fogalomalkotást, ítélőképességet, lényegérzéket stb., de ugyancsak speciális képességeket is, mint nyelvi, matematikai stb. képességet.

A tesztvizsgálatok ellen számos kifogást szoktak felhozni, amelyek nem egyszer a dolgok mélyére hatni nem tudó vélekedésekből, vagy egyszerűen hozzáértés hiányából származnak. A kritika mindenesetre megállja a helyét — feltéve, hogy az a gyakorlaton nyugszik és mindenkor tárgyilagosan bírálja a kritika tárgyát. A tárgyilagos kritika főbb pontjait és ezek ellenvetéseit a következőkben foglaljuk össze:

Először is azt szokták a tesztvizsgálatok ellen felhozni, hogy a tesztek nem a spontán, a szabad intelligenciát leplezik le, hanem csak a képességek reaktív megnyilvánulásait mérik; azután a tesztek csak teljesítményeket mérnek és nem

magukat a képességeket. Felhozzák még, hogy a teszteknek nem tulajdoníthatunk mindenkor diagnosztikus értéket, mert a vizsgálati személy sohasem fog maximális teljesítményt felmutatni. Ezen érvekkel szemben felhozhatjuk azt, hogy a tesztvizsgálat mindezen nehézségek dacára nélkülözhetetlen módszere a pszichikus vizsgálatoknak. A teszt módszer az ember ősrégi gyakorlatán alapszik és manapság is a gyakorlati élet számos területén mint biztos kutató módszert alkalmazzák. A tesztvizsgálatban azonkívül mindig elkülönítjük a teljesítményeket a képességektől és az előbbiekből következtetünk az utóbbiakra; és ha a következtetések alapján esetleg téves diagnózist vagy prognózist adunk is, meg kell gondolnunk, hogy a tesztvizsgálattal még mindig többre jutunk, mint akármilyen más hasonló eljárással. Azonkívül a teljesítmények magas korrelációban állnak a képességekkel is, azért a nagy tévedéseket a legnagyobb valószínűség szerint kizártnak tekinthetjük.

Másik nagy ellenvetésként azt szokták felhozni, hogy a tesztek teljesítmény-tesztek lévén, a teljesítményekbe a vizsgált képességen kívül más képességek is belejátszanak; a tesztek alkalmazásakor a képességeknek egész kötege jön működésbe: azaz a tesztek sohasem lehetnek monoszimptomatikusak, hanem csupán poliszimptomatikusak. Tény az, hogy egy teszt alkalmazásakor a vizsgált képességekkel együtt más képességek is működésbe jöhetnek; erre a tesztvizsgálatoknál mindenkor számítanak is. Éppen ezért a pszichotechnikusok törekszenek olyan tesztek szerkesztésére, amelyek *monoszimptomatikusak*, amelyek tehát egy meghatározott képességet önmagában tárnak fel, leleplezván azt mindazon képességektől függetlenül, melyek nem tartoznak annak lényegéhez. Hogy ilyen monoszimptomatikus tesztekhez juthassunk, a teszt módszer különféle eljárásokat állít fel: ú. n. kontrolteszteket, vagy kiegészítő teszteket alkalmazhatunk, vagy pedig párhuzamosan több tesztet alkalmazunk. Ezzel világosságot deríthetünk arra nézve is, hogy a kérdéses képesség vizsgálatánál milyen más képességek játszottak közre.

Azt az ellenvetést is felhozzák még a tesztvizsgálatok ellen, hogy nem dolgoznak kellő exaktsággal, és sohasem érhetik el a fizikai kísérletek exaktségát. Meg kell gondolnunk, azonban azt, hogy mást kell érteniünk fizikai és mást pszichikai tények és folyamatok exaktségán. Személyiségeket ugyanis nem lehet számokkal jellemezni, a pszichológiai folyamatok semmiféle mértékegységgel nem mérhetők; különben is az exaktságot különböző esetekben különbözőképpen értelmezhetjük: az exaktság — mint W. Stern mondja (*Intelligenz der Kinder und Jugendlichen*) — relatív nagyság; oly

pontosságmaximumot jelent, melynek a kitűzött feladat szempontjából még jelentősége van.

Azt is fel szokták hozni, hogy tanácsosabb visszatérni a megfigyelés módszeréhez, amely a személyiségvizsgálatnak legmegbízhatóbb módszere. Tény, hogy a megfigyelés módszere igen kedvezően egészíti ki a tesztvizsgálatot, de azért az utóbbit sem lehet elvetnünk, és a pszichológusok mindenkor hangsúlyozzák, hogy a tesztvizsgálatokat mindenkor ki kell egészíteni a megfigyeléssel.

A jó teszt pedig mindenkor hatásos kutató eszköze a személyiségvizsgálatnak; kellékei: magas diagnosztikai érték, szélesterjedelmű szimptóma érték, monoszimptomaticitás, rangsorállítás lehetőségének biztosítása, valamint könnyű és szélesterjedelmű alkalmazhatóság.

A tesztvizsgálat úttörői *Cattell, Ebbinghaus, Binet és Münsterberg* voltak. A XX. század elején nagy lendületet vett a tesztmódszer: Ebbinghaus már a teszteredmények kidolgozására is gondolt és lassan megindulnak a differenciális célzatú tesztvizsgálatok is. A francia Binet már hosszú teszt sorozatokat dolgozott ki és az ő nyomán hamarosan Európa többi országában is megindulnak a tesztvizsgálatok. 1917 után az elmélet további kidolgozására kerül a sor; Németországban W. Stern, Piorkovski, Bobertag, Höper; Angliában Terman, Goddard, Whipple; Amerikában Thorndike, Yerkes stb., láttak hozzá a differenciális és pedagógiai lélektan hatalmas fellendítéséhez. Egymásután nyílnak meg a pedagógiai lélektani intézetek és a német szakfolyóiratok tanúskodnak arról a hatalmas munkáról, mely Németországban az új tudományszak és a tesztvizsgálat körül folyik. Hazánkban is hamarosan átlátták a tesztvizsgálat jelentőségét; Szegeden a Várkonyi Hildebrand egyetemi tanár vezetése alatt álló pedagógiai lélektani intézetben, Budapesten a Fővárosi Pedagógiai Szemináriumban folyik értékes munka.

Matematikai tesztekkel elsőnek Voigt alkalmazott 1912-ben, majd 1919-ben. Megkíséreljük itt összeállítani azon tesztek sorozatát, melyeket a matematikai képesség kutatása céljából szerkesztettek. A matematikai képesség tesztjei hat nagyobb csoportba oszthatjuk:

1. a kis gyermek első számteljesítményeinek tesztjei;
2. burkolt feladatok megoldása;
3. megoldhatatlan feladatok kritikája;
4. számolás nem tízes számrendszerben;
5. számsorban törvényszerűség fedezendő fel;
6. geometriai (térbeli) tájékozódás tesztjei.

1. *A kisgyermek első számteljesítményei.*

*Descoeudres Alice* 1921-ben a következő tesztekkel alkalmazta:

a) A kísérletvezető és a kísérleti személy előtt kis edény van apró egyenlő nemű tárgyakkal (kavicsok). A kísérletvezető bizonyos számú darabot maga elé rak és felszólítja a kísérleti személyt, hogy ő is rakjon ugyanannyit maga elé. Addig folytatandó a kísérlet, amíg a kísérleti személy még éppen eltalálja a megfelelő mennyiséget.

b) Az előző próba nehezítve: apró tárgyakat rak ki a kísérletvezető és felszólítja a kísérleti személyt, hogy ujjával mutassa a megfelelő mennyiséget.

c) Megfordítva: ujjával mutatja a kísérletvezető, a kísérleti személy pedig ugyanannyi kavicsot rak ki.

d) A kísérletvezető kopog az asztalon és a kísérleti személyt felszólítja, hogy ugyanannyit kopogjon ő is.

e) A kísérletvezető bizonyos számú tárgyat kirak, a kísérleti személynek meg kell mondani mennyi az, anélkül, hogy megszámlálná. (Szemléleti tömegfelfogás)

f) A kísérletvezető felszólítja a kísérleti személyt, hogy adjon neki bizonyos számú (egy, kettő stb.) tárgyat.

g) A kísérleti személynek ujjával kell megszámolnia a tárgyakat (10 kavics).

*Beckmann* 1923-ban a következő teszteket alkalmazta 2—6 évesek számára:

a) szám előállítás: kockák fekszenek a kísérleti személy előtt, feladat: adj nekem 3 kockát.

b) Számok megkülönböztetése: a kísérleti személy elé egy kettes és egy hármas tárgycsoportot teszünk. Kérdés: „Ez kettő, vagy ez . . . ?”, vagy csak egy hármas csoport fekszik a kísérleti személy előtt kérdés: „kettő ez, vagy három?”.

c) Számok megtalálása: egy táblán különböző pontcsoportok találhatók: Kérdés: „mutasd meg azon csoportokat, ahol 4 pont van”.

d) Számok megnevezése: a kísérleti személynek az előbb említett pontcsoportokban foglalt pontok számát kell megnevezni.

e) összeadás: több kockánk van, melyek mindegyikén külön minden oldallapján ugyanannyi pont található (1—5-ig). Két kockát feldobtatunk a kísérleti személlyel azzal a kérdéssel, hogy mennyit dobott fel.

f) Kivonás: a kísérleti személy kivesz egy kockát (pl. amelyiken 3 pont van), majd egy olyant kell mutatnia, melyen egy ponttal kevesebb található.

*Huth* 1925-ben a következő teszt sorozatot állította össze (5—7 éveseknek):

a) a kísérleti személynek pontokat kell megszámlálnia.

b) Tárgyak megszámlálása (5 karika, 8 pálcika, 10 toll, 7 doboz, 9 szög, 6 gomb).

c) A kísérleti személy elé lapot teszünk, amelyre 5 há-

zikó van rajzolva különböző számú ablakkal és ajtókkal. Felszólítások: „mutasd meg az első (második stb.) házat” — „Mutasd meg a harmadik (ötödik, első, negyedik, második) házat” — „Hány ablaka van az első (stb.) háznak?” — Hány ajtaja, kéménye stb.” — „Melyiknek van a legtöbb ablaka?”.

## 2. Burkolt feladatok megoldása.

*Terman* 1916-ban a következő teszteket alkalmazta (14—18 évesek számára):

a) ha egy ember, kinek heti keresete 20 márka és egy héten 14 márkát ad ki, mennyi időre van szüksége, hogy 300 márkát takarítson meg?

b) Ha két acéltoll 5 pfennigbe kerül, hány acéltollat vásárolhatunk 50 pfennigért?

c) Mennyibe kerül 7 méter árú, ha  $\frac{1}{4}$  m. 1.50 márkába kerül?

d) A kísérleti személynek egy dobozt mutatunk és megmondjuk neki, hogy ez két kisebb dobozt tartalmaz és hogy ezen két kisebb doboz mindegyikében ismét 1—1 egészen apró doboz található. Hány doboz ez összesen, beleszámítva a nagy dobozt is.

e) A nagy doboz két kisebb dobozt tartalmaz, melynek mindegyikében 3—3 apró doboz található.

f) A nagy doboz három kisebb dobozt tartalmaz, melynek mindegyikében 3—3 apró doboz található.

g) A nagy doboz négy kisebb dobozt tartalmaz, melynek mindegyikében 4—4 kisebb doboz található.

h) Éles elméjűségi próba: egy anya fiát elküldi a folyóhoz, hogy onnan 7 liter vizet hozzon. Ad neki egy 5 literes és egy 3 literes korsót. Hogyan tud a fiú pontosan 7 liter vizet kimeríteni (becslés nincs megengedve)?

j) Ugyanez a feladat 5 és 7 literes korsóval és 8 liter hozandó.

k) Ugyanez a feladat 4 és 9 literes korsóval és 7 liter hozandó (5—5 perc engedhető).

Az éleselméjűség próbáját 1928-ban *Liedloff* is alkalmazta.

*A Hamburgi Pszichológiai Laboratórium* tesztjei (10 évesek számára):

a) születésnapom dec. 27.-én van és egy nappal idősebb vagyok Tamásnál. Ez évben karácsony ünnepe keddre esik. Milyen napra esik Tamás születésnapja?

b) *Siegfried* 3 évvel idősebb *Félix*nél. *Siegfried* 95 éves korában meghal és *Félix* 2 évvel előtte hal meg; hány éves *Félix* akkor?



*Kaufmann és Schmidt* 1922-ben a következő Ranschburg-tól származó teszteket alkalmazták:

a) melyik az a szám, melyhez 79-et kell adnunk, hogy 1000-nek ötödrészét kapjuk?

b) Melyik az a szám, melynek háromszorosát 10-el megszorozva 1000-nek háromnegyed részét kapjuk?

c) Hány lépés hosszú egy folyosó, melynek hossza 10 m. és ennek egy huszadrésze, ha egy lépés hossza 75 cm.?

d) Melyik az a két szám, melyeket egymáshoz adva mégegyszer annyit kapunk, mintha a kisebbiket a nagyobbikból levonjuk és ezek közül a nagyobbik háromszor annyi mint a kisebbik, de a legkisebbik 1000-nek negyvened része?

Ezeket a Ranschburg-teszteket alkalmazták Voigts és Köhler is 1925-ben.

A „*Leipziger Lehrerverein*“ 1924-ben a következő teszt-sorozatot alkalmazta (10 évesek számára):

a) egy munkás heti bére 36 márka. Mennyit kap, ha csak félannyi ideig dolgozik?

b) Egy fiú 15 éves, fivére 6 éves. Az apjuk kétszer annyi idős mint a két fiú együttvéve. Milyen idős az atya?

c) 1 liter tej 30 pfenningbe kerül. A tej drágább lesz és literje 10 pf.-el kerül többbe. Mennyibe kerül 5 liter?

d) Én ma 3 márkát adtam ki. Most kilencszer annyi pénzem van, mint amennyit kiadtam. Mennyi pénzem volt azelőtt?

e) Egy torony 50 m. magas. Ez 20 m-el magasabb, mint két ház együttvéve. Milyen magas egy ház?

f) Egy fiú kétszer olyan idős mint fivére. Éveik száma együtt 18. Mennyi idős mindegyik külön-külön?

*Lämmermann* 1924-ben a következő sorozatot alkalmazta (8—14 évesek számára):

a) nagybátyám tegnap 60 pf.-et ajándékozott nekem. Eből most 40 pf.-em van meg, mennyit adtam ki?

b) Atyám 30 almát vitt haza. Felét anyám megfőzi. A többit atyám elajándékozta a gyermekeknek és mindegyiknek ötöt ad. Hány gyermek volt ott?

c) Három fivérnek összesen 20 diója van. Az elsőnek 8, a másodiknak 7. Mennyi diója van a harmadiknak?

d) Elzának 10 képe van, Frigyesnek háromszor annyi. Vilmosnak feleannyi mint Frigyesnek. Hány képe van Vilmosnak?

e) Barátomtól 90 márkát kölcsönöztem. 30 M.-t épp most adtam vissza, 20 M.-t holnap adok vissza neki, hány márkával maradok neki adós?

f) Egy szállító 3 ládát szállított. Az első 40 font, a másik 50 font súlyos, a harmadik olyan súlyos mint az első kettő együttvéve. Milyen súlyos a három együttvéve?

g) Az asztalon 2 nagy doboz van, mindegyikben 3 kis doboz van eldugva. Hány doboz ez együttvéve, beleszámítva a nagy dobozt is?

h) Én 8 éves vagyok, anyám négyszer olyan idős mint én; atyám olyan idős mint anyám és én együttvéve. Milyen idős atyám?

j) Áprilisban egy tojás ára 20 pf. volt, májusban 4 tojásért 60 pf.-t kellett fizetnem. Hány pf.-el lett olcsóbb egy tojás?

k) Mikor tegnap 2 ceruzát vásároltam egy márka bankjegyből 70 pf.-et kaptam vissza. Mennyibe került egy ceruza?

m) Megszorzok egy számot 3-mal és 10-et adok hozzá, 100-at kapok. Milyen számra gondoltam?

n) Ferencnek 20 márkája van a takarékbán, Emma nővérének 14 márkája. Ferenc annyit akar megtakarított pénzéből nővérének ajándékozni, hogy mindkettőjüknek egyenlő mennyiségű pénze legyen. Hány márkát kell odaajándékoznia?

p) Az apa egy almával teli kosárkát vitt haza. Felét az anyának adta főzéshez, a többiből 3 gyermeknek 4—4-et ajándékozott, mennyi alma volt a kosárban?

r) Az asztalon egy nagy doboz van, mindegyikben még két kisebb és ezekben 2—2 egészen kicsiny. Hány doboz ez összesen, beleszámítva a nagyokat is?

s) Egy számhoz 40-et adok és akkor 1000-nek ötödrészt kapom. Milyen számra gondoltam?

t) Egy atya oly idős, mint az anya és gyermeke együttvéve. Az anya 5-ször olyan idős, mint a gyermek. A gyermek 6 éves. Milyen idős az atya?

u) Három fivérnek összesen 30 diója van. Az elsőnek 8, a másodiknak kétszer annyi. Hány diója van a harmadik fivérnek?

Hasonló kérdéses feladatot alkalmaztak Bobertag és Hylla 1925-ben 10 éveseknél.

### 3. Megoldhatatlan feladatok kritikája.

A „Leipziger Lehrerverein“ 1921-ben a következő teszteket alkalmazta (elemi iskolások számára):

a) Egy gazdásznak 15 lóva van. Ő mindegyiknek naponta  $6\frac{1}{2}$  liter zabot ad. Mennyi ideig elegendő a készlete, ha naponta  $7\frac{3}{4}$  litert ad nekik? (Megoldhatatlan)

b) Kiásandó egy  $45\frac{3}{4}$  m. hosszú, 20 m. széles és 45 cm. mély téglalap alakú mélyítés; mennyi targonca földre van

szükség, ha a targonca is téglalap alakú,  $1\frac{1}{2}$  m. hosszú,  $1\frac{1}{2}$  m. széles és 1 m. magas? (megoldható).

c) „A” 9 zsák lisztet vásárol. Minden zsák  $126\frac{1}{2}$  kg.-ot tartalmaz. 1 kg. liszt ára 58 pf., mennyit nyert „A”? (megoldhatatlan).

d) Bernát így szól Antalhoz: Ha én  $3\frac{1}{5}$  évvel idősebb volnék mint amennyi most vagyok, akkor  $5\frac{1}{3}$  évvel idősebb volnék nálad. Milyen idős Bernát? (megoldhatatlan).

e) 98 gr. újezüst 18 gr. nikkelt tartalmaz. Mennyi nikkelt található egy tucat újezüst evőkanálban? (megoldhatatlan).

f) Egy égő januárban  $16.368\text{ m}^3$ . világítógázt fogyasztott. Mennyit tesz ki a fogyasztás egy óra alatt, ha a napi fogyasztás 4 óráig tart? (megoldható)

És így tovább ....

Wittmann utalt arra, hogy a megoldhatatlannak jelzett a) d) és e) feladatokat idősebb kísérleti személyek (tanító stb.) határozatlan számértékek segítségével megoldották.

Franken-től (1923) származik a következő két teszt, (10 évesek számára):

a) ha egy tojást 4 percig kell főznünk, mennyi ideig kell három tojást főznünk ugyanabban a vízben?

b) Három fivér van, mindegyiknek egy nővére. Hány testvér ez összesen?

Voigts és Köhler 1925-ben a következő tesztek alkalmazták:

a) Valakinek két telke van, egyik  $420\text{ m}^2$ , másik 20 m. hosszú. Mily nagy a kettő együttvéve?

b) Valaki 34000 M.-ért árut vásárolt, és 115 % kárral adta el. Mennyiért adta el az árut?

c) Valaki 740 kg. kávé vásárol és keres rajta 24 %-ot. Hány márkát keresett?

d) Valaki 30 zsák rozsot és 40 zsák búzát vásárolt az elsőn 1560 M.-t, a másikon 1875 M.-t keresett. Mily drágán vásárolta a rozsot, ha a búzáért 5800 M.-t fizetett?

e) Erna szalonnát, vaját és sajtot vásárol. 2 Márka van nála. Mennyi marad neki, ha a vajért 0.65 M.-t, a sajtot 0.54 M.-t fizetett?

f) Egy tehervonat 5 szénrel telt kocsit húzott. Az elsőben 12500 kg, a másodikban 13400 kg., a harmadikban 13200 kg. és az utolsóban 14200 kg. szén volt. Hány kg.-t szállított a vonat?

g) Egy szám  $\frac{4}{5}$ -része 20-al nagyobb mint a szám  $\frac{3}{5}$ -része. Milyen nagy a szám?

h) Egy legelő füve 6 tehén számára 15 napra elegendő. Meddig elegendő 10 tehén számára?

(e., g., és h. feladatok megoldhatók)

Az a.-f. feladatok Köhler munkájából vannak véve, a

g) és h) Möhle-Sewening számtankönyvéből.

Ugyancsak Voigts és Köhler alkalmazták a következő sorozatot:

j) Valaki egy árvaháznak 900 márkát ajándékozott Mennyit kapott egy-egy gyermek?

k) József 8 fonttal nehezebb Pálnál. Mily nehéz József?

m) János 13 éves, Frigyes 16 évvel fiatalabb. Milyen idős Frigyes?

n) Valaki 280 font lisztet vásárolt. Hány márkát keresett rajta, ha 4700 M-ért adta el?

o) A „Quinta C”-ben számtanból 3 tanuló jelest, 19 tanuló elégségest és 2 tanuló elégtelent kapott; hány tanuló kapott jót?

p) Lásd az első sorozat e) feladatát.

r) Lásd az első sorozat f) feladatát.

s) Lásd az első sorozat g) feladatát.

t) Ernának  $3\frac{3}{4}$  márkát kell fizetnie. Mennyit kap vissza 10 márkából?

A j.-r) feladatok Köhler munkájából valók, az s) és t) Möhle-Sewening számtankönyvéből.

#### 4. Számolás nem tizes számrendszerben.

Woldemar Voigt elsőnek alkalmazott ilyen teszteket 1919-ben (saját nyilatkozata szerint azonban az 1919. évi kísérlet egy 1912-ben véghez vitt kísérletének megismétlése volt). Voigt nyolcas és hatos számrendszerbeli számok átszámítását és az ezen rendszerekben való számolást tűzte ki feladatul.

a) Átszámítandók a következő nyolcas rendszerbeli számok: 274, 316, 407, 100, 53, 10, 1234, 1000, 20400; 275036.

b) Átszámítandók a következő hatos rendszerbeli számok: 351, 444, 302, 100, 34, 10, 2054, 1000, 14302; 404302.

c) Elvégezendők a következő műveletek a hatos számrendszerben:  $365+754$ ,  $35+43$ ,  $235+7257+67$ ,  $547-256$ ,  $7006-5325$ ,  $517 \times 6$ ,  $53 \times 76$ ,  $5664:7$ ,  $1005:57$ ,  $36366:713$ ,  $643456:306$  és  $\sqrt{333141}$ .

d) Elvégzendők a következő műveletek a hatos számrendszerben:  $425+354$ ,  $23+33$ ,  $235+4124+55$ ,  $435-243$ ,  $5004-3142$ ,  $315 \times 4$ ,  $31 \times 54$ ,  $2445:5$ ,  $504:35$ ,  $25332:514$ ,  $434042:205$ ,  $\sqrt{303121}$ .

A „Leipziger Lehrerverein” 1921-ben ötös és hatos számrendszerbeli feladatokat alkalmazott.

Először megmagyarázzák a kísérleti személynek, hogy miként lehet egy ilyen számrendszer alapszáma egy a tíztől

különböző szám: tegyük fel, hogy ilyen ötös alapszámú rendszert akarunk felépíteni. Ez esetben az egyesek helyén csak 1, 2, 3 és 4 egyest alkalmazhatnánk, és semmiféle más számot; mert az öt már a következő helyre kerülne. Az ötöt tehát következőképen írjuk:

(írni és mondani:) semmi egyes 0  
és egy ötös 10

A „hét“ tehát így néz ki:

(írni és mondani): 1 ötös és 2 egyes 12

Olvasd e számokat most az ötös rendszerben:

20 (2 ötös 0 egyes, tehát ..... tíz)

30 (3 „ 0 „ „ ..... tizenöt)

21 (2 „ 1 „ „ ..... tizenegy)

32 (3 „ 2 „ „ ..... tizenhét)

44 (4 „ 4 „ „ ..... huszonnégy)

A huszönöt tehát 5 ötös volna, ez már megint a következő hely, így kell írni: (írni és mondani)

semmi egyes, semmi ötös, egy huszonötös, tehát balról jobbra leírva ..... 100.

A huszonhat így néz ki:

1 egyes, 0 ötös, 1 huszonötös .... 101

A huszonnyolc:

3 egyes, 0 ötös, 1 huszonötös .... 103

A harmincnégy:

4 egyes, 1 ötös, 1 huszonötös .... 114

Ha öt huszonötösünk van, ismét egy hellyel balra jutunk. Százhuszonöt (írni és mondani)

0 egyes, 0 ötös, 0 huszonötös, 1 százhuszonötös .. 1000

A feladatok a következők:

Tízesrendszer	Ötösrendszer	Hatosrendszer
19	34	31
36	121	100
42	132	110
68	233	152
85	320	221
100	400	244
+ 117	+ 432	+ 313
<u>467</u>	<u>3332</u>	<u>2055</u>

Még a következő 10-es rendszerbeli szorzást kell átszámítaniok és elvégezniök:  $38 \times 22$ .

Hatosrendszerben:  $102 \times 34$

$$\begin{array}{r} 412 \\ 310 \\ \hline 3512 \end{array} \quad (\text{idő 30 perc})$$

Schlüssler és Schmarzhaupt 1921-ben a következő feladatokat alkalmazták (12 évesek részére):

Tízrendszer	Ötrendszer.	Tízrendszer	Ötrendszer
12	22	25	100
29	104	37	122
48	143	112	422
125	1000	63	223
94	334	29	104
57	212	121	441
+ 117	+ 432	+ 17	+ 32
<u>482</u>	<u>3412</u>	<u>404</u>	<u>3104</u>

*Huth* ezeket a próbákat különösen átlépési vizsgáknál realisztikus középiskolák számára nélkülözhetetleneknek tartja.

### 5. Számsorban törvényszerűség fedezendő fel.

Elsőnek *Ruthe* alkalmazott ilyen teszteket 1920-ban. *Ruthe* tesztjei a következők voltak:

- a) 81, 54, 35, és
- b) 7, 11, 16, 22

Ezen sorozatok a bennök felismert törvényszerűség alapján balra és jobbra meghosszabbítandók.

*Bogen* 1921-ben szintén végzett ilyen kísérleteket.

*Thomson* 1921—22-ben a következő sorozatokat alkalmazta:

Példakép egy sorozatot mutatunk be a kísérleti személyeknek .... 1 2 3 4 5 6 (7) és felhívjuk figyelmüket, hogy azért kell a zárójelbe 7-et írni, mert a többi számok közti különbség mindig 1. Még két példát mutatunk:

11, 10, 9, 8, 7, 6, (5) .... itt a különbség 1.

1, 2, 4, 8, 16, 32, (64) .... itt minden szám az előzőnek kétszerese.

Próbáljuk most meg a következőkkel

3, 6, 9, 12, 15, 18, ( )

2, 4, 6, 8, 10, 12, ( )

1, 3, 5, 7, 9, 11, ( )

1, 2, 3, 4, 32, ( )

Egy másik sorozat a következőképen:

1, 3, 9, 27, 81, 243 ( )

17, 15, 13, 11, 9, 7 ( )

1, 2, 4, 7, 11, 16 ( )

96, 48, 24, 12, 6, 3 ( )

7, 5, 5, 7, 5, 5 ( )

9, 8, 7, 6, 7, 8, ( )

Ugyancsak *Thomson* alkalmazta a következő feladatokat:

az itt következő számsorozatból kihúzandók azon szá-

mok, melyek nem illeszkednek bele a sorozatba:

Például 6, 2, 8, 7, 4, 10.

Itt a 7 kihúzandó, mert ez az egyetlen páratlan szám, vagy a 4, 7, 8, 6, 19, 3 sorozatban 19 kihúzandó, mert ez az egyetlen kétjegyű szám.

A 14, 3, 15, 9, 6, 12, sorozatból a 14 húzandó át mert a többiek 3-mal mind oszthatók (14 nem).

Feladatok:

18,	16,	4,	8,	20,	12
5,	9,	3,	4,	1,	7
75,	62,	20,	10,	15,	25
17,	49,	4,	24,	13,	18
26,	3,	7,	31,	13,	17
18,	22,	30,	24,	6,	12
81,	27,	11,	21,	9,	3
8,	2,	16,	32,	6,	4
7,	28,	21,	35,	14,	27.

A „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium“ 1922—25-ben a következő sorozatokat alkalmazta: (Roggenkampftól)

a) 10 évesek számára:

A kísérleti személynek példaképpen a következő megoldásokat adták:

(1)	(2)	3,	4,	5,	6,	(7)	(8)
(0)	(2)	4,	6,	8,	10,	(12)	(14)
(33)	(30)	27,	24,	21,	18,	(15)	(12)
(3)	(5)	8,	10,	13,	15,	(18)	(20)

A zárójelben levők a megoldások. A kísérleti személyek most egy cédulát kapnak, melyen a következő megoldandó feladatok állanak:

...	...	10,	15,	20,	25	...	...
...	...	8,	9,	12,	13	...	...
...	...	20,	22,	29,	31	...	...
...	...	54,	45,	36,	27	...	...
...	...	17,	14,	12,	9	...	...
...	...	41,	32,	31,	22	...	...
...	...	18,	14,	17,	13	...	...
...	...	16,	18,	17,	19	...	...
...	...	8,	16,	32,	64	...	...
...	...	8,	16,	18,	36	...	...

A kísérleti személynek a sorozatokat balra és jobbra két-két taggal ki kell egészíteniök.

b) 14 évesek számára:

A kísérleti személyeknek ugyanúgy mint előbb, példákön megmagyarázzák a feladatok lényegét és azután a következő feladatokat kell megoldaniok:



...	...	8,	16,	32,	...	...
...	...	81,	27,	9,	...	...
...	...	12,	17,	23,	...	...
...	...	46,	37,	30,	...	...
...	...	12, 13,	16, 17,	...	...	...
...	...	19, 16,	14, 11,	...	...	...
...	...	2, 4,	7, 11,	...	...	...
...	...	10, 2,	9, 3, 8,	...	...	...
...	...	162,	54,	18,	...	...
...	...	81,	54,	36,	...	...

Hasonló feladatokat alkalmaztak még:

*Sassenhagen* 1925-ben 13—14 éves városi és falusi gyermekek számára:

*Kohn-Schächter* 1924—26-ban zsidó és nem zsidó fiúk összehasonlító-pszichológiai vizsgálatára;

A „*Leipziger Lehrerverein*“ 1924-ben 10 évesek vizsgálatára:

*Bobertag* és *Hylla* 1925-ben 10 évesek vizsgálatára

*Liedloff* 1928-ban 17—18 évesek vizsgálatára.

6. *Geometriai (térbeli) tájékozódás tesztjei.* A geometriai képesség vizsgálatához különféle sík és térbeli alakzatokra vonatkozó feladatokat állítottak össze. Ezen feladatcsoporthoz más képességeket is szoktak vizsgálni, ezért itt csak a speciálisan a geometriai tájékozódásra vonatkozó teszteket állítottuk össze.

#### A) Alakzatok összeállítása.

Az ezen csoportba tartozó feladatok abban állnak, hogy bizonyos alakzatok (kör, téglalap stb.) szétvágott darabjait a kísérleti személynek ismét az eredeti alakzattá kell összeraknia. Ilyen próbákat sokan alkalmaztak, közöttük Binet (1908), Bobertag (1911), Rossolimo (1911), Mikulski (1911), Squire (1912), Köhn (1913), Jaederholm (1914), Terman (1916), Lipmann—Stolzenberg (1918), Rybakow, a „Hamburgi Pszichológiai Laboratorium“, a „Leipziger Lehrerverein“, Voigt (1921), Sterzinger (1925), Schwärig (1925), Liedloff (1928).

#### B) A szemmérték vizsgálata

Stern Erik 1921-ben végzett kísérlete a következő volt: A kísérleti személy elé egy papírlapot helyeztek, melyen öt különböző hosszúságú párhuzamos vonal, két összehajló vonal és egy pont, valamint egy kör volt látható: egyenként

egy-egy számmal (a pont egy betűvel) megjelölve. Feladat: Az 1. vonal szemmértékkel megfelezendő; a 2. vonal három részre osztandó; a 3. vonal mellett balra egy kis — 1 cm hosszúságú — vonalka rajzolandó, ennek alapján aztán megadandó, hogy mily hosszú a 3. (cm. és mm. pontosság) és a 4. (cm. pontosság); az 5. felezőpontjában merőleges húzandó; a 6.-ra jobb végpontjában merőleges húzandó; a 7-re az adott P. pontból rajzolandó merőleges; a 8. körnek középpontja adandó meg.

Ezt a kísérletet alkalmazták (csekély változtatással) Huth 1925-ben és Liedloff 1928-ban. Hasonló kísérleteket alkalmaztak Lipmann—Stolzenberg 1918-ban és a „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium” 1923-ban.

### C) Térbeli alakzatok és viszonyok felismerése.

A kísérleti személy elé egy lapot tesznek, melyen körök, négyzetek és háromszögek találhatók különböző összeállításban. Felszólítjuk a kísérleti személyt, hogy tegyen egy jelet pl. arra a helyre, amely a kör belsejében van, de nincs benne sem a négyzetben. sem a háromszögben stb. Ilyen kísérleteket alkalmazott Abelson 1911-ben. Hasonló vonatkozású feladatokat alkalmaztak Lämmermann (1925), Goddard (1912), Dunham (1916), Terman (1912), Porteus (1919), Ruthe (1920), a „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium” (1922).

### D) Alakzatok megváltoztatása.

Sternnek (Hamburgi Pszichológiai Laboratórium) 1920-ból származó kísérlete a következő:

A kísérleti személynek pálcikákból összeállított és a csúcsoknál mozgatható alakzatot kell elképzelnie, vagy pedig a kezébe adunk egy ilyen. Az elképzeléssel megoldandó feladatok a következők:

- a) Lehet egy ilyen háromszöget eltolni?
- b) Lehet egy ilyen négyszöget eltolni?
- c) Mutasson egy négyszöget, mely háromszöggé tolható el.
- d) Mutasson egy négyszöget, mely nem tolható el háromszöggé.
- e) Gondoljon el egy hat szilárd botból alkotott háromoldalú piramist. Eltolható-e ez a piramis egy más alakzattá? (megokolva).
- f) Egy ezen botokból összerakott kockát képzeljen el, mely az asztalon fekszik (egyik oldallapján). A függőleges

éleket addig hajlítjuk le, ameddig vízszintesek lesznek. Milyen síkalakzat keletkezik?

g) Képzeld el az előző kockát és képzelje el, hogy két szemben levő csúcsa a térátlóval össze van kötve. Tolja el a szemben levő csúcsokat az átlón addig, amíg azok a középpontban találkoznak.

Ennek a kísérletnek egy részt alkalmazta Liedloff 1928-ban.

Hasonló kísérleteket (pl. óramutatók felcserélése) alkalmaztak: Binet (1908—11) Terman (1916), Lipmann—Stolzenberg (1918), Schlüssler és Schwarzhaupt (1921), a „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium“ (1922—25), Sterzinger (1925), Blumenfeld (1923) és Krug (1924).

#### E) *Térbeli alakzatok analízise.*

Voigt 1921-ben alkalmazott egy ilyenféle kísérletet.

a) Részalakzatok kikeresése (nagy alakzat több részalakzatra osztva). Feladat: Megrajzolandók az összes részalakzatok, amelyeket a mellékelt teljes alakzat tartalmaz, és minden egyes részalakzatnál megadandó, hogy hány ugyanolyan alakú és nagyságú található.

b) Viszonyító vonalak megtalálása. A mellékelt nagy alakzatba belerajzolandók mindazok az első és másodrendű átlók, melyekből a kis belső alakzatok keletkeztek.

c) Alakzatok összeállítása. 1. Mellékelve van egy háromszög; feladat: kettő, négy, nyolc ilyen háromszögből egy négyzet állítandó össze. 2. Mellékelve van négy részalakzat, melyekből egy négyzet állítandó össze. 3. Mellékelve van négy más alakzat, melyekből egy téglalap állítandó össze.

Ide tartozik a híres Ruthe-féle kockakísérlet.

Képzeld el egy pirosra festett kockát 3 cm. élhosszal. Ezt 1 cm. élű kis kockákra vágjuk szét. Kérdések: 1. Hány kiskockát kapunk? 2. Hol fekszenek azon kiskockák, melyeknek 3 piros oldaluk van? 3. Hol fekszenek azok, melyeknek 2 piros oldaluk van? 4. amelynek 1 piros oldaluk van? 5. Hol fekszenek, melyeknek nincs piros oldaluk? 6. Hány kis kocka van 3 piros oldallappal? 7. 2 piros oldallappal, 8. 1 piros oldallappal, 9. piros oldallap nélkül?

Ruthe ezt a kísérletet egyszerűbben alkalmazta 1920-ban. Így alkalmazta a „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium“ 1924/25-ben. Alkalmazta még Liedloff 1928-ban.

Ilyen térbeli feladatú kísérleteket alkalmaztak még Schwärig (1922), a „Hamburgi Pszichológiai Laboratórium“ (1922—25) és Lipman—Stolzenberg (1918).

A geometriai tárgyú tesztek közé sorolhatjuk még a pontok kikeresését, szögek kikeresését és a Ziehen-féle vonal-

kísérletet, melyeket másokkal együtt Liedloff alkalmazott 1928-ban.

A tesztek alkalmazása után új feladat hárul a kísérletek vezetőire. A tesztek eredményeit fel kell dolgozni. A feladatokat megoldásuk helyessége szerint pontozzák és az eredmények alapján a kísérleti személyeket rangsorba sorozzák. Már most a vizsgálat célja szerint az eredmények feldolgozása is különböző lehet. Exisztenciális vizsgálat esetén szó lehet a százalékos eredmények egyszerű összeállításáról, de rendszerint az egyes képességterületek közti viszonylatokat szokták kutatni; keresik, hogy az egyes képességek mennyiben függenek, vagy függetlenek egymástól. Itt azután a számolás bizonyos korrelációs együtthatók alapján történik, melyekkel nem óhajtunk itt behatóan foglalkozni.

Fejlődésre vonatkozó vizsgálat esetén a különböző életkorú kísérleti személyek eredményeit egymás mellé állítják és egy görbével tüntetik fel az illető képességek fejlődésének menetét.

## 2. Vizsgálati eredmények.

Ezen a helyen egyes vizsgálatok eredményeit óhajtjuk bemutatni, amelyeket az előbb ismertetett teszt-sorozatok alkalmazásával végeztek. Célszerűnek láttuk a matematikai képesség egzisztenciális és fejlődésre vonatkozó vizsgálatokat különválasztva ismertetni.

### A) *A matematikai képesség egzisztenciális vizsgálata*

Ruthe 1920-ban folytatott vizsgálatokat Berlinben. A kísérleti személyekről annyit tudunk, hogy köztük fiúk és leányok vegyesen voltak és a leányok egy évvel fiatalabbak voltak a fiúknál. Ruthe 7 tesztet alkalmazott: ismertetett kockakísérletét, egy geometriai tárgyú feladatot, egy hosszabb levezetést igénylő feladatot, egy burkolt feladatot, egy óramutató próbát és két számsorozatot, melyekben törvényszerűség fedezendő fel. Az egy évvel fiatalabb leányok valamivel könnyebb feladatokat kaptak, azonkívül a számolókészséget is vizsgálták, ezen utóbbi alapján állapítja meg Ruthe, hogy a matematika és mechanikus számolás két különböző dolog, melyek alkalmilag kombinálva is fellelhetnek.

Ruthe ismerteti az egyes feladatok megoldásmenetét és megállapítja, hogy az utolsónak alkalmazott teszt (7, 11, 16, 22 sorozat) eredményei meglehetősen kedvezőek. Megállapít-

ja még, hogy a kísérletnek alávetett 104 leány teljesítményei jelentékenyen a fiúkéi mögött maradnak. Pontos összehasonlítás azért nem lehetséges, mert a leányok átlagban egy évvel fiatalabbak voltak a fiúknál. Ezzel szemben elég nagyszámú jó számolót talált Ruthe a leányok között, akik a matematikában csak középszerűt vagy keveset nyújtottak, viszont a kevés számú matematikailag tehetséges leány között legnagyobb részben közepes vagy rossz számolókat talált.

*Kaufmann és Schmidt* 1920—21-ben egy magyarországi elemi iskola IV. és egy gimnázium két alsó osztályában végeztek kísérleteket 478 fiún és 253 leányon. A vizsgálatot vezetőik az előző fejezetben ismertetett négy Ranschburg-tesztet alkalmazták.

Eredmények:		(helyes megoldások)	
Teszt:	a)	b)	c) d)
IV. elemi	22.9%	5.8%	2.5% 5.4%
I. gimn.	65.7%	19.9%	6.5% 26.0%
II. gimn.	73.8%	24.3%	8.9% 43.5%
Összesen:	54.0%	16.6%	5.9% 24.4%

Mint látható, a legjobban bevált az a) feladat, azt a kísérleti személyek 54%-a megoldotta; majd a d), b) és c) tesztek következnek.

*Kaufmann és Schmidt* a következőkben foglalják össze vizsgálataik eredményeit:

1. Aki az őáltaluk alkalmazott tesztek alapján kiválónak bizonyult, azt az iskolában az esetek nagy részében — legalább egy éves megfigyelés alapján — igen jó vagy jó (és soha sem gyenge) számolónak ismerték.

2. Egy igen jó vagy jó iskolai jegy a számtanból csupán kivételesen felel meg valóban kiváló számolási gondolkodóképességnek. (Az iskola inkább egyedül a számolókészséget vizsgálja.)

3. A számolási gondolkodóképesség fiúknál sokkal inkább kiváló, mint leányoknál.

*Liedloff* 1928-ban végzett kísérleteket egy kisvárosi reál-gimnáziumnak 11 tanulóján (köztük 3 leány) életkoruk átlagban 17.4 év volt. Liedloff kísérleteivel nem csupán a matematikai képesség létezését vizsgálja, hanem vizsgálja az arimatematikai és geometriai részképességeknek, valamint a munkafigyelemnek, munkakészségnek és önállóságnak a matematikai képességhez és ezeknek egymáshoz való viszonyát. Ezért tehát nemcsak a matematikai képesség tesztjeit alkalmazza, hanem más teszteket is; felhasználja Ruthe kockakísérletét, Stern alakváltoztatási kísérletét, Ziehen vonal-

kísérletét, a vonalkombinációkra való visszaemlékezés próbáját, a könyvmérték-kísérletet, a Ziehen-féle „Code” kísérletet a képleírás próbáját, a pontok kikeresésének próbáját, a Voigt és Rybakow-féle összeállítási kísérletet, a szemmérték próbáját, a számsorozati törvényszerűség próbáját, egy kísérletet az osztálymunka vizsgálatára, Terman éleselméjűség próbáját, egy kombinációs kísérletet, valamint betű- és szám-áthúzási kísérleteket.

Liedloff rangsorba sorolja a kísérleti személyeket, mégpedig külön rangsorokat állít fel a matematikai, a geometriai és aritmetikai képességek, a figyelem, a munkakészség és önállóság szempontjából. Bizonyos számítások elvégzése után a következő eredményeket állapítja meg:

1. A matematikai képesség erős megegyezést mutat az aritmetikai és geometriai képességgel, előbbivel némileg erősebet mint utóbbival. A geometriai és aritmetikai képességek is erős megegyezést mutatnak.

2. A képességek erős megegyezést mutatnak az önállósággal, közepeset a figyelemmel és többnyire csekélyebbet a teljesítményekkel, a készséggel és a gondossággal.

3. A geometriai és aritmetikai teljesítmények erős megegyezést mutatnak; csak közepeset a figyelemmel és készséggel, és csekélyebbet a gondossággal és önállósággal.

4. A figyelem erős megegyezést mutat a képességgel és önállósággal, közepeset a képességgel és teljesítményekkel, csekélyet a gondossággal.

5. Az önállóság erős megegyezést mutat a képességgel és figyelemmel, csekélyet a készséggel, a gondossággal és a teljesítményekkel.

6. A készség erős megegyezést mutat a figyelemmel; közepeset a teljesítményekkel és gondossággal, csekélyet a képességgel és önállósággal.

7. A gondosság közepes megegyezést mutat a készséggel, csekélyet a képességgel, teljesítményekkel, figyelemmel és önállósággal.

V. Kommerell 1928-ban végzett vizsgálatokat, vizsgálati eredményeit azonban kizárólag a kísérleti személyek iskolai osztályzataira alapította. Feladatául tulajdonképpen annak kikutatását tűzte ki, hogy a matematikai képesség mennyiben lép fel elszigetelten és hogy mennyiben inkább eltérő az általános intelligenciától, mint más, pl. nyelvi képesség.

A tanulók iskolai jegyeiből Kommerell a következőképpen gondolja az eredményeket levonhatónak:

Tegyük fel, arról van szó, hogy a matematikai képesség nagyobb mértékben lép fel elszigetelten, mint a nyelvi képesség. Erre mértékül nyilván minden szakmában a jegynek az átlagjeggyel szemben mutatkozó különbsége szolgál. Ha

sok tnuló esetén ezek a különbségek valójában a matematikánál lényegesen magasabbak mint a nyelveknél, akkor bizonyítottnak tekinthető, hogy a matematikai képesség nagyobb mértékben lép fel elszigetelten, mint a nyelvi képesség. Kommerell először 740 érettségiző gimnáziumi tanuló jegyeit vizsgálta meg. (Tübingen). A nyelvi képesség mértékéül a legalkalmasabbnak a latin kompozíciót látta; az a véleménye, hogy egy más szakma sem ad olyan alkalmas nyelvi iskolázást és olyan jó mértéket a nyelvi tudásra és értelemre nézve, mint a német nyelvből a latinra való fordítás. Először is tehát a matematikai illetőleg a latin jegyek és az átlagjegyek közötti különbséget állapította meg s megszámlolta, hogy hányszor lépett fel minden egyes különbség. Természetesen általában a kis különbségek lesznek a leggyakoribbak, hiszen rendszerint áll az, hogy egy tehetséges tanuló minden szakmában valami rendeset mutat fel és fordítva.

A cikkében közzétett I. táblázat valóban azt mutatja, hogy mindkét szakmánál a kis különbségek gyakrabban jelentkeznek, mint a nagyok; de azt is mutatja, hogy a latinnál a kis különbségek gyakoribbak, a nagyok sokkal ritkábbak mint a matematikánál. Pl. + 0.1 és -0.1 közötti különbségek a latinnál 160 esetben, a matematikánál 101 esetben lépnek fel. A legnagyobb pozitív különbség a matematikánál 3.1, a latinnál 2.0; utóbbi itt csak egyszer lép fel, a matematikánál négyszer. A legnagyobb negatív különbség a matematikánál 3.1, a latinnál 1.7; ez itt ismét csak egyszer, a matematikánál ötször lép fel. Érdekes még a valamennyi különbség összlétszáma.

		Ez:	
	pozitív	negatív	összesen
Matematika	299.2	336.6	635.8
Latin	122.3	196.8	319.1

A matematikánál tehát körülbelül a kétszerese, mint a latinnál. Ezek tehát lényeges különbségek s elővigyázatos ítélettel is minden esetre azt következtethetjük belőle, hogy a matematikai képesség az általános intelligenciától nagyobb mértékben független s ettől nagyobb mértékben tér el, mint a nyelvi képesség, hogy továbbá a jó tanulók általában szintén jó matematikusok, de hogy kivételek gyakrabban és nagyobb mértékben előfordulnak, mint a nyelveknél, *hogy tehát a matematikai képesség nagyobb mértékben lép fel elszigetelten, mint a nyelvi képesség.*

Ezek szerint tehát jogosan beszélhetünk egy specifikus matematikai képességről abban az értelemben, miként vala-

mely irányú művészeti tehetségről beszélünk. Valójában vannak esetek — ha nem is olyan gyakoriak, mint ahogy közönségesen gondoljuk — amikor egy átlagosan intelligens tanuló a matematikában felmondja a szolgálatot és fordítva, amikor kiváló matematikai készségről van szó, míg az általános intelligencia nem emelkedik az átlagos fölé, sőt néha mögötte elmarad. Ezt különben az iskolai gyakorlat tapasztalatai is megerősítik.

A grafikus ábrázolás kedvéért egy kis átszámítást végzett Kommerell. Először is az összes számokat 100 tanulóra számította át, vagyis kiszámította, hogy az összes számok hány százaléka esik az egyes különbségekre. Ezt azért kellett elvégeznie, hogy összehasonlító számokat kapjon, amelyek a megvizsgált esetek számától függetlenek. Majd a különbséget egy teljes egységbe tartozó csoportba foglalta össze s kiszámította a százalékokat, amelyek minden egyes ilyen csoportra esnek.

Igy keletkezett a II. táblázat.

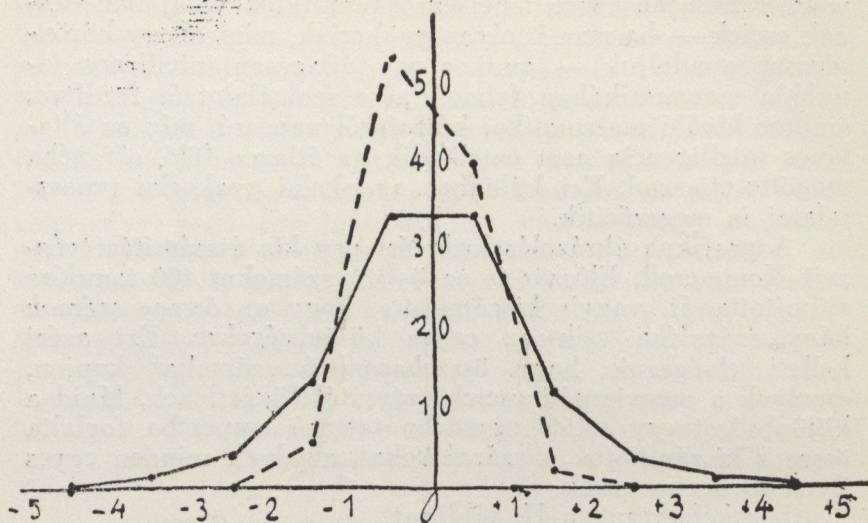
Különbségcsoportok	Matematikai százalékszámok, minusz átlag	Latin kompozíciós százalékszámok minusz átlag
+ 3.1—4	0.3	0
2.1—3	3.4	0
1.1—2	11.8	2.3
0 —1	33.4	39.9
— 0 —1	33.6	52.7
1.1—2	12.8	5.1
2.1—3	4.7	0
3.1—4	0.7	0

Az ebben a táblázatban foglalt számokat grafikusán is ábrázolta Kommerell. Abscissák gyanánt a különbségeket rakta fel, ordináták gyanánt a minden csoporthoz tartozó százalékszámokat; éspedig az ordinátát minden esetben annak a vonalnak középpontjába rakta fel, amely az illető különbségnek megfelel, tehát pl. az 1.1—2 különbséget az 1.5 pontban és így tovább. Így állott elő az 1. ábra, amely a matematika és a latin viszonyát adja vissza.

A különbségek összege:

	pozitív	negatív	összesen
Matematika	24.5	49.1	73.6
Latin	20.8	16.0	36.8





1. ábra

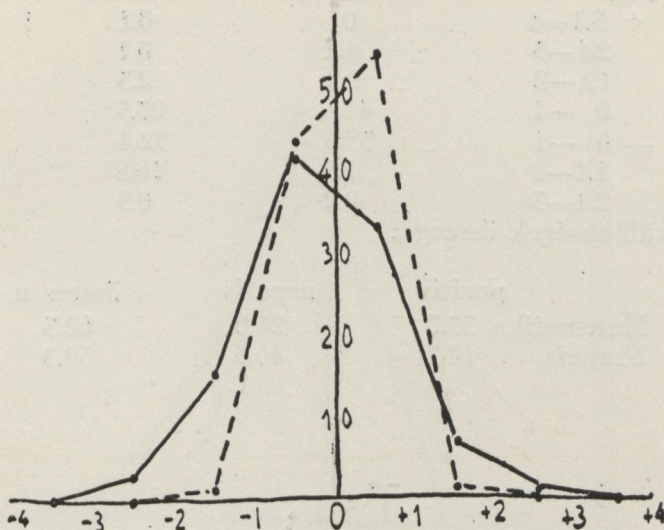
—— Matematika mínusz átlag  
 ..... Latin        „        „

Ezek a görbék szemléltető képét adják a korrelációs viszonyoknak. Minél magasabbra emelkedik a görbe a középén s minél kevésbé terjed ki mindkét oldalra, annál magasabb a jegyek korrelációja az átlagjegyekhez s egyúttal a szóbanlevő szakma iránti képesség korrelációja az általános intelligenciához. A görbék tehát jellegzetes különbséget mutatnak a matematika és latin között.

Hogy ne csak egy intézet eredményeit kelljen számításba vennie, egyik alsófokú evang. teológiai szeminárium jegyeit is vizsgálta Kommerell. Itt is mintegy 740 egyes esetből nyerte a számokat és azokat a következő táblázatba és ábrába foglalta össze:

	Matematika	Latin
+ 2.1—3	0.1	0
1.1—2	7.1	1.1
0 —1	33.3	54.6
— 0 —1	41.7	43.4
1.1—2	15.2	0.9
2.1—3	2.7	0





2. ábra

Kiderül, hogy itt a latinnál a kis különbségek még inkább többségben vannak, mint a gimnáziumban s ezenkívül, hogy a matematikai teljesítmények erősebben elmaradnak az átlag mögött.

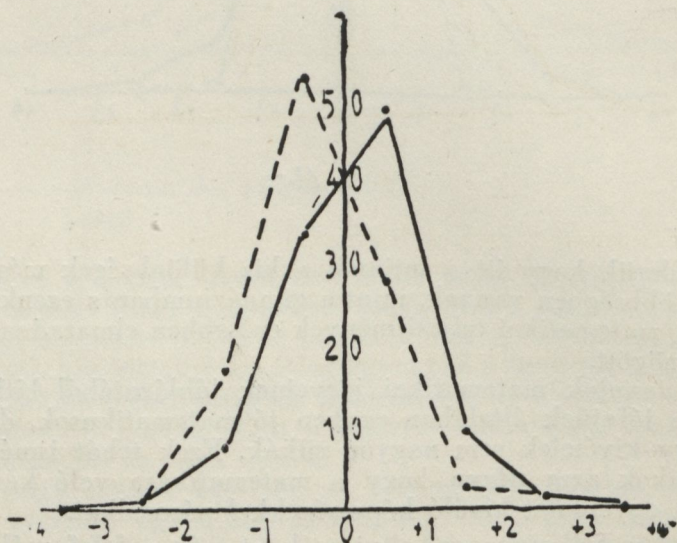
A tanulók matematikai jegyeinek táblázatából látható, hogy a jófejűek általában egyben jó matematikusok, de az is, hogy kivételek sem nagyon ritkák. Ezek tehát ismét bizonyítékok arra nézve, hogy a matematikára való készség hiánya egyébként kiváló képességekkel párosulhat.

Kommerell ugyanezt a vizsgálatot még a felső reáliskolákra is kiterjesztette (Tübingen és Reutlingen). Ez annyiban érdekes, hogy itt mintegy 900 tanuló mellett kb. 100 tanulóéány is figyelembe vehető volt. A nyelvi teljesítmények mértékéül itt a franciában mutatott jegyeket vette tekintetbe. Továbbá figyeleme veendő még, hogy a felső reáliskolában a matematika négyszeresen számít, tehát az átlagjegyeknél ez erősebben kifejezésre jut ha — amint az a következő táblázatokból és ábrákból kiviláglik — a különbségek a matematikai és a nyelvi átlaggal szemben kevésbbé térnek el egymástól, mint a humanisztikus intézeteknél.

Fiuk	Matematika	Francia
+ 3.1—4	0	0.1
2.1—3	1.1	0.1
1.1—2	9.2	2.3
0 —1	48.6	27.5
— 0 —1	33.3	52.4
1.1—2	7.5	16.8
2.1—3	0.2	0.9

Különbségek összege:

	pozitív	negatív	összesen
Matematika	37.7	24.6	62.3
Francia	12.7	46.5	59.3



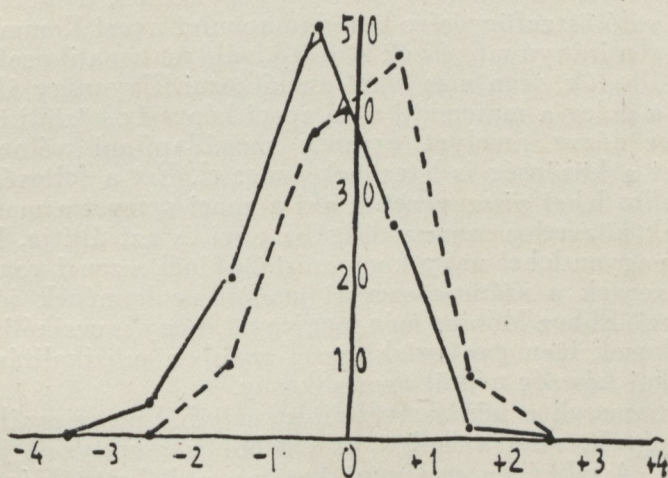
3. ábra

Leányok	Matematika	Francia
+ 1.1—2	1.0	7.6
0 —1	25.9	46.7
— 0 —1	50.0	37.1
1.1—2	19.2	8.6
2.1—3	3.9	0

Különbségek összege:

	pozitív	negatív	összesen
Matematika	10.2	55.7	65.9
Francia	33.5	30.8	64.3





4. ábra

Kimutatható, hogy a felső reáliskolások nyelvi teljesítményei a matematikai teljesítmények mögött elmaradnak, a leánytanulóknál pedig éppen fordítva van: a francia nyelv-nél többségben vannak a plusz különbségek, a matematikánál a mínusz különbségek. Ebből kétféle következtetést vonhatunk le:

1. A felső reáliskolások nyelvekben való gyengébb teljesítményeinek okai nem a tanításmódban és a tantervben keresendők. Az okot inkább abban látja Kommerell, hogy a tanulók nagyobb számban olyan körökből toborzódnak, amelyekben kevesebb érdeklődést és ösztönzést kapnak a nyelvi kifejezésekre. Ezek a gyermekek már otthonról kevésbé hajlamosak nyelvi szempontból.

2. A második jelenség a tanulóleányok kifejezett mínusza a matematikában. Ez annyiban is feltűnő, mivel általában a leányiskolák tehetségesebb tanulói, akik jófejűek, a felső reáliskolában folytatják tanulmányaikat. Nem marad tehát más következtetés hátra, mint hogy a matematikai képesség a női nemnél tényleg kisebb mértékben van meg, mint a férfinemnél. A női értelemnek a matematikában való csődöt mondását egyébként már mások is megállapították (Voigt).

Kérdés tárgyát teheti továbbá, vajjon a matematikai képességnek más különleges képességekhez — esetleg a zenei képességhez — való viszonya kimutatható-e? E tekintetben

egyenlőre negatív irányban annyi állapítható meg, hogy a matematika a költői műzsával rossz lábon áll. Hogy Goethe a matematikával nem élt jó barátságban, az több kijelentésből ismeretes. A festői és szobrász képességeknek a matematikával való összefüggésére kevés támpontot nyert Kommerell; hogy ilyen irányú művészek között kiváló matematikusok voltak találhatók, ezen nem lehet csodálkozni. Ugyanígy áll lát-szólag a dolog a matematikai és zenei képesség közötti összefüggésre nézve, amelyet egyesek megállapítani vélnek és amelyet a közönség is létezőnek ismer el. Ezt a feltevést talán *Gallra* lehet visszavezetni, aki a zenei szövet a matematikainak közvetlen szomszédságába teszi és azt állítja, hogy: „Nem nagyon lehet nagy komponista, akinél a zenei vonatkozású szervek a számok szervei mellett ne lennének jól kifejlődve“ Ehhez Möbius még megjegyzi, hogy muzikális matematikusok igen gyakoriak, ezzel szemben muzikalitás matematikai készség nélkül nem ritkaság.

Kommerell a kérdés felderítése céljából megvizsgált egy tanítóképzőt, ahol a hallgatók zenéből is osztályzati jegyet kapnak. A cikkében erre vontakozólag mellékelte táblázatban közölt számok ugyanazt mutatják, amit előzőleg a matematika mínusz latin, a matematika mínusz francia és matematika mínusz rajznál talált. Továbbá az is látható, hogy nagyjában a jó matematikusoknál a zenei jegyek magasabbak, mint a rossz matematikusoknál; de hisz ez a nyelveknél hasonló módon volt megállapítható. Ennél az összefüggésnél azt a következtetést is le lehet vonni, hogy a női nemnél átlagosan kisebb fokú képességet állapíthatunk meg a matematikára nézve, míg a zenénél nem ugyanaz az eset.

### *Összefoglalás:*

A matematikai képesség és valamely más tudományos vagy művészi képesség között határozott és szabályos korrelációt teljes biztonsággal nem állapíthatunk meg. A nagyobb vagy kisebb megegyezés éppen azzal magyarázható, hogy egy jó koponya általában minden szakon valami hasznosat fog produkálni. Másrészt azonban mégis kiderült, hogy éppen a matematikánál — gyakrabban mint más szakmáknál — specifikus képességet lehet megállapítani oly értelemben, hogy kiváló matematikai teljesítmények más területen mutatott kisebb képességgel együtt haladnak és hogy kiváló eleméknél a matematika területén való esődbejutás nem is olyan ritka jelenség.

Ha tehát egy ilyen — bárcsak egyes esetekben — specifikus matematikai készség megállapítható, kérdés, lehet-e ezt tovább elemezni? A pszichológusok ugyanis megkülönböztet-

nek egy vizuális geometriai és egy absztrakt-funkcionális képességet. Ez a két képességirányzat tehát a matematikában a geométernek, és az analitikusnak felelne meg. Az esetek nagy számában (több mint 1400 felsőreáliskolai érettségizett-nél) megállapította Kommerell az analízis és a geometriai jegek közötti különbségeket s megszámlolta, hányszor fordult elő minden egyes különbség s a százalékszámokat kiszámította.

Eredményképen az adódott, hogy az analízisben és geometriában nagyon erős teljesítménykülönbség csak a legritkább esetben lépett fel és hogy a magas különbségek rendszerint *nem* a jó matematikai képességgel bíróknál voltak konstatálhatók. Ha tehát a bizonyítványokból a képességre következtetést vonhatunk, minden esetre kérdésesnek látszik, jogunk van-e analitikai és geometriai képességtípust megkülönböztetni, minthogy ezek a valóságban csak igen ritka esetben mutathatók ki. A tárgyilagosságnak talán inkább megfelelt, ha a matematikai képességnek két irányáról beszélünk, amelyek azután az egyénben legtöbbször egyenlő mértékben fejlődnek ki.

#### B) *A matematikai képességek fejlődésére vonatkozó vizsgálatok.*

Beckmann 1923-ban 2—6 éves kisgyermekek számteljesítményeit vizsgálta. A kísérleti személyek száma 465 volt; a teszteket megtaláljuk az előző fejezet elején az értekezés 27. oldalán.

A következő táblázat feltünteti az egyes korosztályok számteljesítményeit. (Rövidítések: E=szám előállítás, K=szám megkülönböztetése, T=szám megtalálása, N=szám megnevezése)

Gyermekek száma:		20	20	46	25	41	42	56	60	155
Gyermekek kora:		2	2·5	3	3·5	4	4·5	5	5·5	6
2 szám	E	%	30·0	70·0	69·6	84·0	90·2	98·9	100	100
	K		5·0	15·0	47·8	73·0	87·8	98·9	94·6	98·3
	T			10·0	23·9	48·0	75·6	92·9	92·9	96·7
	N			5·0	21·7	36·0	63·4	83·4	91·5	93·4
3 szám	E			19·6	20·0	63·4	83·3	82·1	93·3	96·1
	K			6·5	16·0	63·4	81·7	78·6	91·7	90·3
	T			4·4	20·0	46·3	76·2	71·4	90·0	87·1
	N			2·2	12·0	34·1	66·7	54·0	85·0	87·1
4 szám	E			4·4	12·0	39·0	54·8	64·3	86·7	92·2
	K			2·2	12·0	36·6	52·4	57·1	85·0	74·2
	T					8·0	24·6	47·6	46·4	78·3
	N					8·0	19·5	21·5	37·7	70·0
5 szám	E				4·0	17·1	35·7	44·6	70·0	74·4
	K				4·0	21·9	35·7	39·3	73·3	50·3
	T					14·6	11·9	28·6	61·7	41·9
	N					12·2	9·5	21·4	51·7	47·1

A fejlődésmenet a táblázatból jól leolvasható. A kisgyermek számteljesítménye fokozatosan növekszik és 6 éves korban már az 5-ös szám előállítására is  $\frac{3}{4}$  részben végbe megy a gyermek lelkében.

Még egy érdekes összeállítást ad Beckmann a kisgyermek által véghezvitt alpműveleti megoldásokat illetően. Az e) és f) tesztek alkalmazásának eredményeit tünteti fel a következő táblázat:

művelet	É L E T K O R					
	3	4	4·5	5	5·5	6
1+1	%	13·4	25·0	81·8	87·2	89·4
2+1		13·4	20·0	72·8	79·6	87·2
3+1			20·0	59·1	66·6	87·2
4+1			10·0	49·1	56·4	83·1
5+1			5·0	27·3	51·3	78·8
2+2			20·0	36·4	59·0	83·0
3+2			10·0	19·1	43·6	83·1
4+2			5·0	9·1	41·0	78·8
3+3			5·0	13·6	46·2	74·5

Részletesen foglalkoznak még az elemi számgondolkodással és a kisgyermek teljesítményeivel Révész (1930, Zeitschrift für angewandte Psychologie) és Seemann (1929, Archiv für die gesamte Psychologie) is; ezekre azonban — más lévén feladatunk — nem térünk ki részletesen.

*W. Voigt* 1919—21-ben 10—20 évesek matematikai tehetségének fejlődésmenetét vizsgálta. Az 1919-es vizsgálatoknál csupán a logikus számolási gondolkodás képezte a kutatás tárgyát; a geometriai gondolkodás kutatására 1921-ben került sor. Voigt megemlíti, hogy az 1919-es vizsgálat egy 1912-ben tartott vizsgálat megismétlése volt. Mint akkor, 1919-ben ismét az általa kezdeményezett teszt-sorozatok (átszámítások nem tízes számrendszerből és számolások nem tízes számrendszerben; lásd a teszteknel 32. oldalt) alkalmazta.

Az 1919-es kísérleteket Voigt a lipcsei II. felsőleányiskolában és a lipcsei tanítónőképzőben, továbbá a frankenbergeri tanítóképzőben rendezte meg és pedig 1919 május és június havában a délelőtti órákban a rendes tanítási időn kívül. A magyarázathoz egyenként 20—22 perc, az első sorozathoz 9 perc, a másodikhoz 13 perc, az egész kísérlethez tehát 42—44 perc volt szükséges. Összesen 369 személyt vizsgált meg és pedig 110 férfiszemélyt és 249 nőszemélyt. (Koruk 14—22 évesig terjedt.)

*Mennyiségi eredmények.* Voigt a 330 15—20 éves kísérleti személynek összesen 6930 feladatot adott fel, amelyek közül azok 4752-t azaz 69%-ot dolgoztak fel. Tehát általában a feladatoknak több mint felét ki is számították. Csak egyetlen esetben sülyedt ez a szám egy kissé az 50 % alá.

*A férfi kísérleti személyek* közül a sikerrel résztvevők száma átlagban 74% és 88% között mozgott, emellett a 15-18 életévig kb. ugyanabban a magasságban, de mindamellett észrevehető esés mutatkozott az összes kísérleteknél a 16 és 17 éveseknél. Szembetűnő volt mindenütt a 18 évnél idősebb tanulók észrevehető kiemelkedése, csupán a számolásoknál érték el ezek rendszerint ugyanolyan részvételi számot, mint a 15 évesek. A görbének ezen pontok között fekvő sülyedése azt látszik sejtetni, hogy a feladatok nehézségének megítélésében mutakozó naivitás fokozatosan helyt ad a nehézségek tudatos leértékelésének és a birtokolt képességeknek. A sikerrel való részvételek száma az átszámításoknál az összes korosztályokban lényegesen nagyobb, mint a számolásoknál. Az öt összehasonlító fokozatban az átlagszámok 85 és 71. Ennek oka bizonyára az osztás nehézségében rejlik, ennek alapja azonban egyelőre nem ismerhető fel.

*Női kísérleti személyek.* A sikerrel résztvevők száma a 14 éveseknél észrevehetően magasabb volt, mint az összes többi korosztálynál és a magasabb korosztályok azt soha sem



érték el egészen, még a 20 évesek sem. A tevékenységhez való naiv nekikezdésének az előnye a pubertas után láthatóan elvész és bizonyos tehetetlenség általában soha többé nem lesz teljesen leküzdhető. Az egyes összehasonlító fokozatokon a sikerrel részvevők száma nagyjában egyforma, az átszámításoknál majdnem mindvégig emelkedő, (54 és 68 között) a számolásoknál ezzel szemben csökkenő (65—53). Emelkedő korral tehát az átszámítások mindinkább könnyebbek, a számolások mindinkább nehezebbek lesznek.

Hasonlítsuk össze a férfi és női kísérleti személyeket. A fiúk a feladatoknak átlag 78 %-át számították ki, a lányok csak 59 %-át, ami elég lényeges különbség. Ez tehát megerősíti a mondottakat, vagyis hogy a fiúk nemcsak tevékenyebbek a munka megkezdésénél, hanem általában képesek arra, hogy szükség esetén gyors elhatározással új úton induljanak el.

*A helyes megoldások.* Mindkét kísérleti csoportból együttevée az adott feladatoknak kb. 40 %-át oldották meg helyesen. Ez, tekintettel a feladott osztásoknak viszonylag nagy számára, igen használható érték, amely egyébként még emelkedik, ha a 14 és a 20 évesek teljesítményeit is számításba vesszük.

*Férfi kísérleti személyek.* A számolási képesség fejlődésének jellegzetes lefolyását az összes számolás mellett legjobban mutatják a nyolcas számrendszer kombinációs értékei. Eszerint a 15. és 18. életév között a számolási teljesítőképességben bizonyos nyugalmi állapot áll be, melyet a 19. életév kezdetén erőteljes előretörés vált fel. Igen érdekesek a teljesítmény-értékek a kétjegyű számok átszámításánál. Ezek az értékek ugyanis lényegesen magasabbak a fiatalabb csoportokban és észrevehetően alacsonyabbak az idősebbeknél. Ez a jelenség ismét bizonyíték arra, hogy a fiatalabbak számolási gondolkodása mechanikusabb, míg az idősebbeké módszerezesebb és tárgyilagosabb. A pubertás után az önálló gondolatvezetésben bizonyos ellanyhulás áll be, amelyből a fiú egy éven belül teljesen kilábol. A mondottak még világosabban felismerhetők a hatos számrendszer átszámításainál. Voigt utal a fejlődési görbe sajátságos ugrásaira és az ebből való következtetésekre és a logikai számolási gondolkodás fejlődésének lefolyását a 14. életévtől kezdve kétéves periódusokba óhajtja osztani, amelyekben emelkedés és hanyatlás következnek egymásra, de azért mégis úgy, hogy egy kis előrehaladás mindig megmarad. A számolásoknál a teljesítmények a hatos számrendszerben általában magasabbak, mint a nyolcas számrendszerben. Kivételt csak a háborúban résztvettek képeznek, kiknek teljesítményei még a 15 éveseké alá is süllyednek. A háborúban résztvettek a hatos számrendszerben mutatott teljesítményük erős csökkenésével bizonyítékát ad-

ják annak, milyen kedvezőtlen befolyása volt a háborús élményeknek a teljesítőképességükre.

*Női kísérleti személyek.* A 15—19 éves leányok átlagban mindannyian kevesebbet nyújtanak mint a 14 évesek és a 20 évesek nem sokkal többet nyújtanak mint ezek. Az önálló tevékenység iránti kedv és képesség a 16—19 évesekben a legcsekélyebb, a 20. életévben kissé emelkedik anélkül azonban, hogy a vezetés mellett való tevékenység iránti kedvet és képességet egészen elérné. Így megállapítható, hogy a női nemnél a pubertás beálltával a számolási készség magassági pontját éri el és maga a pubertás az energia fokozott túltermelésének időszakát jelenti, amelyet szükségszerűen az ellanyhulás időszaka követ. A 20. életévvel a női nem annyira kilábol az erőteljes nemi átalakulás következtében föllépő elernyedésből, hogy a szellemi tágabbkörű számolási gondolatmenetek kivitelezésére ismét képes lesz. A haladás nem nagy, hasonlítsuk csak össze a 14 és 20 évesek csoportjait. Az sem tehető fel, hogy a 20. életév után állandóan haladás áll be. A teljesítmények hirtelen esése a 14. évtől a 15. évig oly erőteljes, hogy szinte természetellenesnek tetszik. Voigtnak ezen megállapítást egy 15 éves leány is megerősítette, aki a következőképpen nyilatkozott: „Mult évben a matematikában a legjobb osztály voltunk, és ebben az évben szinte semmit sem tudunk.“ Tanárok kijelentései ezzel a nyilatkozattal megegyeznek.

*Férfi és női kísérleti személyek.* Dacára a 20 éves leányoknak a női kísérleti személyek csoportján belül elfoglalt előnyös helyzetének, a 17 éves fiúk és a háborúban résztvettek teljesítőképességét ezek még nem érték el. A megvizsgált fiúk pontosan 50 %-kal többet produkálnak, mint a hasonló korú leányok.

*Minőségi eredmények.* (A félig helyes megoldások viszonya a helyes megoldásokhoz).

*Férfi kísérleti személyek.* A fiúknál átlagban a félig helyes megoldások a helyes megoldásoknak 25%-át teszik ki, az átszámításoknál, illetőleg számolásoknál a megfelelő érték: 16% és 34%. Ez a tekintélyes különbség nem csodálható, hiszen az átszámításoknál az összes feladatokban egységesen összeállított gondolatsorokról van szó, amelyek általában csak egy irányban tolhatók el, ezzel szemben a számolásoknál mind a négy különböző műveletnél a legkülönbözőbb kisiklások fordulhatnak elő. Az összes esetekben a 19. életév megóvja előnyös helyzetét éspedig a legkifejezettebben a számolásoknál.

*Női kísérleti személyek.* A 14—19 éves leányok pontossága egyformán jó, illetőleg rossz, csupán a 20 évesek emelkednek ki egy kissé. Igen érdekesek a 14 éveseknél az át-

számítások számainak összehasonlítása a számolásokéival (62, 72). Ez bizonyítéka annak, hogy a 14 éves leányok a szemlélésben még igen kíváncsiak támaszt keresnek és találhatnak. Az absztrakció, mint ahogy az a számolási műveleteknél megkövetelhető, ezzel szemben nagy nehézségeket okoz nekik, bizonytalan, félig-meddig való munkára kényszeríti őket. Még a 20 évesek jobb absztrakt felfogásukkal is alig nyerek vissza a 14. életév biztonságát.

*Férfi és női kísérleti személyek.* A számolási tevékenység pontatlanságának átlagos mértékszámai 43 és 25, ami azt jelenti, hogy a leányok majdnem megegyezően olyan bizonytalanul számolnak, mint a velük egykorú fiúk. A nagyobb önállóságnak és kiterjedtebb absztrakciónak követelménye a férfi kísérleti személyeket még energikusabb erőfeszítésre, nagyobb koncentrációra s ezzel kiválóbb számolási pontosságra kényszeríti, ezzel szemben a leányokat (általában!) felületességre, félmegoldásokra, azaz nagy pontatlanságra kényszeríti. A 15. életévben mind a fiúk, mind a leányok még egyformán jól vagy rosszul dolgoznak, ettől kezdve útjaik mindjobban elválnak. Mindezek dacára a háborúban résztvettek pontatlanabban számolnak, mint a velük egyidős leányok.

*A helytelen megoldások viszonya a helyesekhez.* Átlagosan félannyi feladatot oldottak meg helytelenül, mint helyesen.

*Férfi kísérleti személyek.* A fiúknál a hibás megoldások számában félreismerhetetlenül egész lassú süllyedés áll be, a 19 évesek átlagosan a legkedvezőbben állnak. Ez egy bizonyos gondolkodási állandóságnak és nyugodtságnak a jele, nemkülönben saját képességeik tiszta felismerése.

*Női kísérleti személyek.* A kísérleti csoportokban a hibátlan munkának semminemű emelkedését nem észlelhetjük és a 20 évesek alig biztosabbak, mint a 19 évesek.

*Férfi és női kísérleti személyek.* Megállapítható, hogy a férfi és a női kísérleti személyek különösen a hatos számrendszerben mutatnak fel különbséget (52, 93). A leányok majdnem megegyezően olyan hibásan számolnak, mint a fiúk. A nyolcas számrendszerben ezzel szemben előfordul, hogy a leányok itt-ott egy kevéssel hibátlanabban dolgoznak mint a fiúk. A női nemnek a számok világában erőssége az utánzás és az után-gondolás. Ahol vezetik és megindítják, ott annak körén belül amit végez, százalékosan nem csinál több kimondott hibát, mint a férfinem.

*Jellegetes megoldások.* Az osztás az összes kísérleti személyek számára a legnehezebb teljesítménynek tűnt fel. És éppen itt számolnak a fiúk kétszer olyan helyesen mint a leányok s mialatt a leányok úgyszólván csak a könnyebb osztásokhoz mernek hozzáfogni, azalatt egy 15 éves fiú már mind

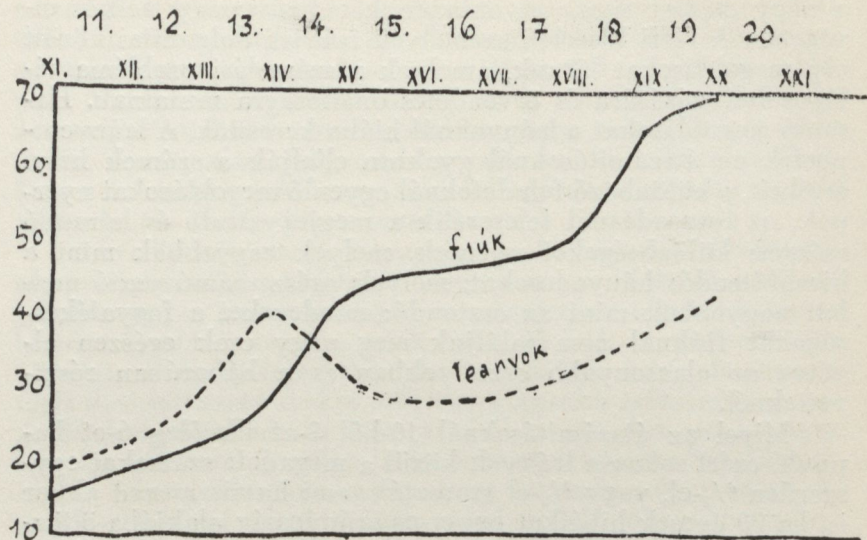
a négy osztást simán és minden körülményesség nélkül elvégezte. A férfi kísérleti személyek írásbeli dolgozatai között oly megoldásokat látunk, amelyek a számolási probléma világos felfogására és öröndetes önállóságra mutatnak. Hasonló megoldásokat a leányoknál hiába keresünk. A leánycsoportok az átszámításoknál gyakran eltolják a számok helyi értékeit, s különböző feladatoknál egyenlő megoldásokat nyernek; az összeadásnál felcserélik a megjegyzendő és leírandó számot; különbségeket nyernek, melyek nagyobbak mint a kisebbítendő; hányadosokat, melyek egész számú osztó mellett nagyobbak mint az osztandó; mindezeket a fogyatékosságokat fiúknál nem találjuk meg vagy csak egészen elvétve az alacsonyabb osztályokban és a háborúban résztvetteknél.

Mivel az átszámításoknál 10-ből 8-at illetőleg 6-ot kapunk, ezért sokan a leányok közül a megadott számokat egyszerűen  $\frac{4}{5}$ -el, vagy  $\frac{3}{5}$ -el szorozták, ami hamis marad akkor is, ha 20 évesek hibáikat egy x-es arányosság alakjába öltöztetik. A leányokat egyes esetek elhamarkodott általánosításai olyan különleges szabályokra vezették, amelyek egyrészt annyira bonyolultak, hogy Voigt és az illető kísérleti személy pár nap múlva már nem tudták újra megtalálni, másrészt olyan megtévesztően egyszerűek, hogy a feladatokat pár perc múlva diadallal vezetőjük kezébe nyomták.

Egy felső leányiskola VIII. osztályában egy egész sereg leány a nyolcas számrendszerben így számolt:  $35 + 43 = 71$  és ezt a jellegzetes hibát a 20 évesek csoportjában megtaláljuk. Így igazolják a hibák az imént mondottakat és megerősítik azt a feltevést, hogy a női nemnél a 20. életév után a számolási készség terén semmiféle magasabb kifejlődés nem következik be.

Tisztán mechanikus elj. írás, hiányos mennyiség-öntudat, matematikai lelkiismeretlenség, túl korai általánosítás, kedélyhangulattól függő mukakészség, szemlélethez való tapadás: ezek jellemzik általában a 14—20 éves leányok számolásbeli tevékenységét.

A fiúk kifejlődésük során mindezen hibáktól (amennyiben egyáltalán előfordulnak) teljesen megszabadulnak. Ha pedig a háborúban résztvetteknél helyi-érték eltolásokat, a számok kezelésében való tanácstalanságot találunk, akkor felismerhetjük, hogy milyen elvadítóan befolyásolta a háború az elvont gondolkodást.



Voigt vizsgálatának eredményeit a következőkben foglalja össze:

1. A számolási gondolkodás kifejlődése a 10. és 20. életév között nem folyamatosan következik be, hanem ugrásszerűen, és pedig a férfinemnél kétszer (a pubertás idején és a 19. életév kezdetén), a női nemnél egyszer (a pubertás idején) észrevehetően gyors emelkedés mutatkozik a számolás-képesség terén.

2. A pubertás, amely a női nemnél jó egy évvel korábban kezdődik, a számolási képesség kifejlődésénél mindkét nemnél egyaránt energiai túlprodukciót okoz, amely visszaesést von maga után, amely viszont a férfinemnél a fejlődésnek több éves nyugalmi állapotát, a női nemnél a számolási képesség kétségtelen hanyatlását jelenti. Ezt az ellanyhulást csak a 20. életév kezdetén küzdik le.

3. A férfinem számolási teljesítményei a pubertás előtt csekélyebbek, mint a női nemé, mind nagyobb mértékben felülmúlják azonban azokat a pubertás után.

4. A fejlődés lefolyását és a számolási képesség összehasonlított nagyságát kb. a fenti görbékkel jellemezhetjük.

5. A számolási készség fejlődésében mutatkozó egyéni variáció a férfinemnél lényegesen tágabb körű mint a női nemnél és egészben véve kedvezőbben alakul mint utóbbinál.

6. A munka módja a pubertás előtt mindkét nemnél lényegében egyforma. A 14. és 20. életév között a számolási tevékenységet a férfinemnél növekvő önállóság, biztonság, a

mennyiségi és szabály-öntudat tartósan önszabályozó állandósága, végül a problémáknak tisztán elvont felfogása iránt való törekvés (aktivitás) jellemzik. Ezzel szemben a női nemnél ezen egész idő alatt a vezetés utáni vágy, mechanizálásra való törekvés, a szemlélethez való tapadás, a problémáknak túlkorai általánosítására való és érzés szerinti megoldás iránti hajlam, valamint hiányos mennyiség-öntudat és a szabály-öntudat gyakori kihagyása (receptivitás) ismerhető fel.

7. Ugyanazon korú elemi iskolás és magasabb leányiskolás tanulók lényegében ugyanazon számolási képességet mutatják.

*W. Voigt* 1921. évi kísérleteit, melyeket a szemléleti — geometriai gondolkodás vizsgálata céljából végzett — 530 kísérleti személyen végezte el (életkoruk 11—21 évig terjedt; voltak közöttük 28 évesek is.) Az alkalmazott tesztek az előző fejezetben találhatjuk meg a 38. oldalon.

*Eredmények.* A 11 és 12 éves elemista leányok szinte ijesztően alacsony értékeit a magasabb iskolák hasonló korú tanulói 13—94 szeresen múlják felül. A falusi gyermekek 89 illetőleg 90 %-a vagy a megadott teljes alakzatot a legkezdetlegesebb módon éppen hogy lerajzolta, vagy éppen semmit sem csinált, ők tehát a vezetőt nyilván egyáltalán nem értették meg, holott az nekik szószerint ugyanazt a magyarázatot tartotta, mint a magasabb iskolás leányoknak. De másképen is a magasabb iskolák százalékszámai jelentékenyen felülmúlják az elemi iskolásokét és pedig a leányokat illetően 77% illetőleg 89%-kal, fiúkat illetően 100, illetőleg 110%-kal. A gyakorló iskolások a hasonló korú falusi leányokat 41 illetőleg 52%-kal múlják felül, a magasabb leányiskoláktól 19 illetőleg 18%-kal elmaradnak.

A női nem teljesítményei kivétel nélkül jelentősen a férfinem teljesítményei alatt maradnak, a 12 éveseknél maximálisan 94 %-kal, a legbiztosabb összehasonlítást adó csoportokban vagyis a 15—19 éveseknél 17 illetőleg 16 %-kal.

A fejlődésbeli ugrások a férfinemnél a 14. életévben erősen észrevehetőek, a 18. életév körül már kevésbé vehető észre, a női nemnél pedig a 13. életév körül jelentkeznek, a befejeződött pubertás után a javulási periodusok is visszatükröződnek a százalékszámokban.

Érdekes az, hogy a női nem teljesítményeit a férfi neméi, dacára a feladatok rendkívüli könnyűségének, felülmúlják és pedig általánosan 11 %-kal. Az elemi iskolákban is észrevehetően elmarad a leányok teljesítménye a fiúké mögött, mindezek dacára a 14 éves falusi fiúk teljesítménybeli százalékszámja nem éri el a 11 éves magasabb iskolás leányokét.

A leánytanulók fejlődési vonala eleinte nehezen megmagyarázható törést mutat, a továbbiakban azonban mindkét

nemnél a 14. életévig meglehetősen egyformán felfelé irányul s a pubertás ilyen könnyű feladatok megoldását sem gátlólag, sem segítőleg nem befolyásolja.

Ami a további fejlődést illeti megállapíthatjuk, hogy a 14 évesek az indirekt átlók kikeresésére egyenesen képtelenek. A női nem a továbbiakban is a 18. életévig csődöt mond és csak a 19 és 20 éves leányok között találunk egyeseket, akik a feladat nehézségeit megközelítőleg le tudják küzdeni. Ezzel szemben a férfinemnél a belső átalakulás periódusának befejezése után a teljesítmény-görbének erőyes emelkedése mutatkozik. Ez eredményezi azt, hogy a 15—19 évesek összehasonlító csoportjában a férfinem teljesítménybeli százelektáma majdnem tízszer oly nagy, mint a női nemé.

Világosan és tipikusan tükröződik vissza a 15—20 éves fiúk fejlődése teljesítménybeli százalékszámukban: jelentős emelkedés a 14—től a 15. évig, fokozatos emelkedés a 15—től a 17. évig, ettől kezdve észrevehető ugrás a 18—től a 19. életévig, amelyet a 20. életév sem halad meg. A leányok a 14. évtől a 15.-ig keveset hanyatlanak, azután több évig ugyanazon a nívón állva maradnak és egész lassú emelkedéssel végre a 20. életévnél ismét eléri a 14 évesek magaslátát.

A kombinációs komponens szempontjából a női nemnél a 14—18. életévig tisztán kivehető egyenletes fölfelé ívelést tapasztalhatunk. Minthogy a férfinemnél is ebben az időszakban ugyanazt észlelhetjük, megállapítható, hogy a szemléleti geometriai gondolkodás kombinációs komponensei tekintetében a pubertás (a fantázia túltengésének ideje) nem gátlólag, hanem ellenkezőleg segítőleg hat. Ez annál feltűnőbb, minthogy az emelkedés a 11.-től a 14. életévig (különösen leányoknál) viszonylag csekély, hiszen példának okáért a magasabb leányiskolák 11 évesei ugyanazon fokon állnak, mint a 14 évesek és egészen közel a gyakorló iskolásokhoz.

### *Összefoglalás.*

1. A szemléleti geometriai gondolkodás fejlődése lényegében ugyanazon módon következik be, mint a logikai számolási gondolkodásé; továbbá világosan kimutatható mindkét nemnél a pubertás időszakának fejlődési vonala; a férfinemnél a 18—19 évesek fölfelé törése, valamint mindkét nemnél a fejlődés megállása az utópubertási periódusban.

2. Csak a szemléleti geometriai gondolkodás kombinációs oldalát tekintve mondható a pubertás utáni időszak az akadálytalan továbbfejlődés periódusának.

3. A szemléleti geometriai gondolkodásban a női nem teljesítményei mind a pubertás előtt, mind utána minden tekintetben sokkal csekélyebbek, mint a férfineméi.



4. A spontán elvont szemlélet pontossága mindkét nemnél egyforma.

5. A női nemnek a szemléleti geometriai gondolkodásban való munkamódja pontatlanabb és mechanikusabb, mint a férfinemé.

6. Az egyszerű népiskolák tanulóinak teljesítményei egész rendkívüli módon elmaradnak a magasabb tanintézetek növendékeinek teljesítményei mögött és pedig mind kvalitás, mind még sokkal inkább kvantitás szempontjából.

7. A népiskola növendékeit éppen a legkedvezőtlenebb időpontban bocsátja el.

8. A geometriai oktatásra vonatkozólag tett és fentebb közölt vizsgálatok eredményei szerint a koedukáció határozottan mellőzendő.

G. Köhler 1924-ben Bonnban végzett kísérleteket 584 kísérleti személyen (Sextából 137, quintából 111, quartából 115, alsó tertiából 88, felső tertiából 80, alsósecundából 53). Összesen 11 tesztet alkalmazott (lásd az előző részben a 31. oldalon.) Kísérleteinek eredményeit a következő táblázatban állította össze:

Helyes megoldás o/o-a	Sext.	Quint.	Quarta	Alsó tertia	Felső tertia	Alsó sec.
Teszt I.	86·9	98·2	—	—	—	—
II.	59·1	63·0	73·0	—	—	—
III.	57·7	73·9	66·9	—	—	—
IV.	47·5	72·1	66·1	—	—	—
V.	55·5	96·4	80·9	—	—	—
VI.	21·9	77·5	69·6	71·6	81·5	—
VII.	—	30·6	38·3	63·6	—	—
VIII.	—	23·4	42·6	67·0	73·7	75·5
IX.	—	—	—	10·2	47·5	34·0
X.	—	—	—	58·0	77·5	71·7
XI.	—	—	—	31·8	32·5	24·5

Köhler anyagából a következő 6 típust különbözteti meg:

1. A számolók. Ezek legnagyobbbrészt az alsó osztályokban vannak képviselve, a felsőbb osztályokban számuk állandóan csökken. A sextában ez a számolótípus az átlagtanuló karakterisztikuma. Az absztrakt számoláshoz való átmenet a pubertás előtt lép be.

2. A kritikátlanok. Ezek azok, akik nem okolják meg megoldásaikat. Ezek a magasabb osztályokban is megtalálhatók; számuk a feladat nehézsége szerint ingadozik. A pubertás ezek fölött különösebb benyomás nélkül viharzik át.



3. A kérdezők. Ezek a feladat kérdésére magával a kérdéssel válaszolnak. Ezekre is csak lényegtelen befolyással van a pubertás.

4. A mechanikus típus. Ez azon feladatoknál nyilvánul meg leginkább, melyek a polgári számtanból vannak véve.

5. A felületesek.

6. A kritikusok.

#### Vezérfonalak:

1. Az alsó fokozat matematikai gondolkodása tiszta szám-gondolkodás; az átlag kritikai dolgozasmódja mechanikus, érzéstelen.

2. A pubertás a tanulót átvezeti a receptív állapotból az aktív állapotba és a tiszta számgondolkodás eltűnésében nyilvánul, mely utóbbi helyébe a fogadalomgondolkodás lép.

3. A pubertás után bizonyos, a kritikai gondolkodással szemben való ellenszenv mutatkozik, amely a teljesítmények hanyatlásában nyilvánul meg és a felső terciában és alsó sekundában figyelhető meg.

4. A praktikus iskolai gyakorlatban mindezen jelenségeket hasznavehetetlen elemek homályosítják el, melyek már a sextában megtalálhatók és számuk évről-évre emelkedik.

H. Voigts 1926-ban végzett kísérleteket. Ő a következő kérdéseket vetette fel:

1. Milyen tesztek segítségével lehetséges, hogy még kissé idősebb tanulóleányoknál is hosszabb megfigyelés nélkül az ő matematikai számolási gondolkodásuk és kritikai képességük fejlődésének helyzetéről némileg tiszta képet nyerjünk?

2. Milyen befolyása van a megelőző oktatásnak ilyen tesztvizsgálat kimenetelére még akkor is ha — amennyire csak lehet — csupán a képességeket, a tudást vizsgáljuk és nem a könyvtudást?

3. Milyen hibák találhatók a leánylíceum matematikai számtani tantervében, illetve milyen változásokra volna szükség, hogy az eddigi számtantanítási mérsékelt eredmény megjavítható legyen?

Hogy ezen kérdésekre választ adhasson. Voigts három teszt sorozattal kísérleteket végzett. A tanulóleányok száma 464 volt. munkaidő 45 perc (aki korábban be akarta adni dolgozatát megtehetette). Az alkalmazott tesztek az előző fejezetben találhatók meg (burkolt feladatok és megoldhatatlan feladatok kritikája).

Eredmények: az 1. kérdés megválaszolása szempontjából megállapítható volt, hogy a Rauschburg-teszt ebben az alkalmazási formájában a számolási gondolkodási képesség megvizsgálására igen alkalmas volt és pedig leginkább a c. teszt. (29. oldal.) Azok a tanulóleányok, akik ezekben az osztályokban

megoldották, soha sem voltak rossz számolók.

Minthogy azonban a Ranschburg-teszt még más képességeket is vizsgál (mint pl. akarat, koncentrálóképeség, gyors felfogás), a felsorolt képességek esetleges hiánya az egyébként jó számolási képességet elhomályosíthatta. Ez mutatkozott egyes esetekben, kissé ideges, hirtelen természetűeknél, akik csődöt mondtak, holott képességük kétségtelenül kielégítő mértékben (ha nem is kiválóan) megvolt. Ezeket az eseteket, amelyek viszonylag ritkán fordulnak elő azonnal fel lehetett ismerni, miután kis idő múltán a másik (Köhler) sorozattal vizsgálták meg őket. Minthogy ekkor a feladatok írásban adattak meg, azokat megoldották.

Általánosságban kiderült, hogy a Ranschburg és a Köhler sorozatok egyidejű alkalmazása a matematikai számolási kritikai képesség kifejlődésének rendkívül biztos képét szolgáltatja. Különösen érdekes volt az e közben tapasztalt két eset:

Mindkét esetben különösen tehetséges gyermekekről volt szó, akik azonban testi hába által gátolva nem tudtak jó osztályteljesítményeket elérni. A tesztvizsgálatoknál mindketten feltűntek különös tehetségükkel.

Voigts úgy gondolja, hogy a kísérleti úton nyert és a pedagógusok által adott bírálatok közötti megegyezés nálá lényegesen nagyobb mint Kaufmannál és Schmidt-nél. Ennek oka azonban bizonyára a résztvevő tanerők nagy többségének kiemelkedő pszichológiai iskolázottságában és a tanításban megnyilvánuló gondolkodási képesség különös hangsúlyozásában található.

A vizsgálateredményekről felvett tabellák átvizsgálásánál feltűnnek az egyes parallel osztályok megoldási százalékszámai között levő nagy különbségek. Ezek a különbségek épp oly nagyok, mint Döring vizsgálatainál.

Döring ezeket a mutatkozó különbségeket az intelligencia fokának különbségével magyarázta, amelyek azoknak a néprétegeknek különbségéből adódnak, amelyekből a tanulók származnak; ő azt mondja: a) Művelt osztályok gyermekeinél általában a meglevő adottságok jobban ki vannak fejlődve, mint egyszerű osztályok gyermekeinél. Az ősi adottságok minden bizonnyal mindkét csoportnál egyformán vannak elosztva. Csak a fejlődési fok különböző. b) Amit a művelt osztályoknál a család többnyire elér t. i. az adottság fejlesztését és fokozását, azt az egyszerű osztályok gyermekeinél az iskolának kellene nyújtania.

Döringnek az a) alatt tett megállapításaihoz—írja Voigts— minden esetre hozzá kell tenni, hogy a művelt osztályok gyermekei átlagban valamivel tehetségesebbek, mint az egyszerű osztályok gyermekei. Itt alaptevő szerepet játszik az

öröklési faktor és a házasságoknak megfontolt szabályozása által kitermelt magasabbrendű utódlás. A létért való küzdelemben egy művelt család teljesen tehetségtelen ivadéka bizonyára igen hamar, de legalább is egy-két generáció után el fog tűnni a művelt családból és az egyszerű osztály sorába fog visszaesni. Ez azonban az adottságnak nem teljesen egyenletes elosztását adná; mindenestre ezzel a legmagasabb fokú tehetségek elosztása még nem nyert teljes magyarázatot. Az ugyan bizonyos, hogy a család állandó szellemi befolyásával az adottságok kifejlődésének állandó fokozását éri el, de a végső következtetés igen közelfekvő: az adottságoknak ilyen hasonló fokozása és kifejlesztése az iskolai oktatás révén is elérhető.

Komoly kétségek merülnek fel Voigtsban arra nézve, vajjon különböző iskolákban a tesztvizsgálatok egyenlő eredményei az egyes tanulóknál egyenlő mértékben értékelhetők-e. Mert minden további nélkül világos, hogy egy ilyen képesség nem fejez ki állandó (eltekinthetve a totális tehetségtelenségtől), hanem változó értéket, amelynek kifejlődése függ az életkortól és legelsősorban az öröklési faktortól és amely változónak kifejlődési gyorsasága ismét az öröklési faktortól és a szülői ház valamint az iskola külső befolyásaitól függ.

Bizonnyára helyes az a megállapítás, hogy ez a kifejlődés bizonyos meghatározott határok közt marad, ezen belül azonban az oktatásnak, tudásnak és alaptehetségnek nem csekély befolyása van a kifejlődésre. Ez azt jelenti, hogy a jó oktatással, amely elsősorban nem a tudásnak és készségeknek gyűjtésére irányul, hanem az alapképesség kifejlesztésére, a közepes tudású réteg kiszélesítését érjük el. Ezenkívül még megállapítható, hogy az egyes iskolák közül Döring által megállapított különbség nemcsak az intelligencia fokának különbözőségében, hanem az oktatás jóságának és célkitűzésének különbözőségében is nyilvánul.

A fentebb említett tesztek a tehetségfejlődésnek pillanatnyi állását jól kifejezik, de nem az abszolút értelemben vett alaptehetségét. Ebből az következnék, hogy egy gyermek továbbfejlődésére vonatkozó prognózis érdekében végzett tesztvizsgálat eredménye csak feltételes értékű lehet. A később megfigyelt fejlődéseknek tehát csak egy része fog a tesztvizsgálatoknak normális következtetéseivel megegyezni. Hiszen csupán a pillanatnyi jelent és nem a jövőt vizsgálták. A tesztvizsgálatok alapján felállított prognózisok találati biztonsága szempontjából hasonló körülmények állnak fenn, mint az időjárási prognózisoknál és kimutatható lesz, hogy a prognózisoknak 100 %-os megegyezését elérni lehe-

tétlen, bármilyen nagyok is a mi ismereteink a gyermek lelki életét illetően.

Hogy a harmadik kérdésre válaszolhassunk — folytatja Voigts — szükséges a számolási matematikai gondolkodásra és kritikai képességre vonatkozó teszteredmények összeállítása. Ezeket a következőkben foglalhatjuk össze.

1. Az alsó fokozatnál a matematikai gondolkodás tisztán számgondolkodás; az V. osztályig (átlagos korosztály 11—11½ év) az átlagnak munkálkodási módja mechanikus. Még egy megváltoztatott oktatás — vagyis a tulajdonképeni számolási gondolkodás gyakorlását célzó tanítási módszer — esetében sem fogunk lényeges változást elérni, ha középszerű számolókról van szó. Megjegyzendő, hogy ez a módszer a gyermek további fejlődésére fontos jelentőségű. Amennyiben inkább mechanikus oktatás van gyakorlatban s a szellem bizonyos mértékben mechanizálódik, úgy még jó átlagnál is fennforog az a veszély, hogy későbbi munkák során a 12—15. életévekben is mechanikus munka folyik és az immár általánosabban is jelentkező gondolkodási képesség nem fejlődhetik ki, ami által nem lesz munkaképes.

2. A kifejlődési években (12—15. év) csupán lassú növekedést mutatnak a képességek, sőt bizonyos körülmények között a teljesítmények visszaesése is bekövetkezhetik.

3. Az érési periódus utóhatásainak legyőzése után azonban általában a matematikai számolási gondolkodásnak és a kritikai képességnek igen erős növekedése következik be, amely nem annyira fokozatosnak, mint inkább ugrásszerűnek mondható.

4. Ha a teszt sorozatnak ezen eredményeit összehasonlítjuk a fiúintézetek parallel osztályainak eredményeivel, úgy Kaufmannak és Schmidtnek a 12—15 évesekre vonatkozó eredményei beigazolódnak. A fiúk matematikai számolási gondolkodása és kritikai képessége ezen életkorban sokkal gyakrabban kiváló, mint a lányoké.

A tesztvizsgálatok révén megállapított különbségek a fiúk és lányok között a matematika iránti érdeklődés különtségében is mutatkoznak. Mindezekből azonban nem következtethetjük, hogy általában véve a matematikai képesség a lányoknál lényegesen kisebb lenne, mint a fiúknál. Ez ellen szól az érési idő leküzdése utáni ugrásszerű fejlődés is; mindenesetre azonban az alapképesség fejlettsége nem oly előrehaladott.

Az itt közölt vizsgálatok nagy része — mint látható — Németországból származik, de a jelek szerint sűrűn folytatnak ilyen vizsgálatokat Angliában és Amerikában is. A magyar pedagógiai lélektani irodalomban végzett ilyen irányú

kutatásaink méddők maradtak; a matematikai tehetség mi-  
benlétére vonatkozó megnyilatkozások a magyar irodalom-  
ban is találhatók, ilyen irányú vizsgálatokat azonban (lega-  
lább is csoportvizsgálatokat) tudomásunk szerint még nem  
folytattak.

A Németországban végzett vizsgálatok is csupán a 2—21  
évesek intervallumára szorítkoztak, nem történtek még vizs-  
gálatok 21 évesnél idősebbeken, ami pedig igen kíváncs-  
os volna, mert véleményünk szerint a matematikai képességek a  
középiskolai éveken túl is fejlődnek: ez a fejlődés talán fő-  
leg a fogalmak tisztázódásában, az anyagbefogadó-képesség  
növekedésében és a matematikai intuíciónak és találékonysá-  
gának megélénkülésében nyilvánul meg.

Befejezésül még a végzett kísérletekből folyó néhány  
pedagógiai vonatkozású gondolatot vetünk fel.

### 3. Pedagógiai vonatkozások.

A pedagógiai lélektan — mint neve is mutatja — pe-  
dagógiai vonatkozású; vizsgálatainak eredményeiből követ-  
keztetéseket von le a követendő nevelési irányokat illetően.  
Amikor a pedagógusok még nem törekedtek a növendék egyé-  
niségének mélyére hatolni — mert úgy gondolták, hogy az  
egyéni különbségekre kitérni felesleges, hiszen a gyer-  
mek lelke üres lap, melyre azt írhatnak amit akarnak —  
akkor nem is merült fel annyi nevelési probléma, egyetlen  
fontos kérdés a tanítási anyag kiválasztása és annak akro-  
matikus alakban való előadása volt. Sem a növendék lelki  
diszpozícióira, sem ezek fejlődésére nem volt gondjuk és  
így a pedagógiai cél ez volt: minél több ismeretnek minél  
jobban való elsajátítása. A XIX. század vége és a XX. szá-  
zad eleje döntő módon befolyásolta az addigi pedagógiai  
irányzatot: felmerülnek az egyéniség-problémák, megin-  
dulnak a lélektani vizsgálatok és a nevelés központjába mind-  
inkább az egyéniség lép; a „mit tanítsunk“ kérdést most  
már a fejlődő lélek diszpozícióihoz és ezek fejlődésmenetéhez  
mérve igyekezzenek eldönteni és óriási jelentőséget nyer az  
azelőtt mellőzött kérdés: „hogyan tanítsunk“. A tantervek  
összeállításában és a tanítási anyag elrendezésében fontos  
szempont lesz a lélektani szempont (ezen a téren még ma is  
állandó átalakulások vannak folyamatban); magában a ta-  
nításban pedig mind nagyobb súlyt fektetnek a módszerre,  
jelszó lesz: a gyermek lelkéből kell kiindulni, az ő ismere-  
teire építeni és az ő lelki diszpozícióinak megfelelő ismeret-  
anyagot kell vele elsajátíttatni. Felmerülnek a pályaválasz-

tási problémák is és minden téren a pedagógiai lélektanra hárul a feladat, hogy a tehetségesség kérdésében eldöntse, vajjon milyen diszpozíciók fejleszthetők kedvezően az egyén szempontjából.

Az oktatás főszerpontjai azonban természetesen csak a normális átlagra lehetnek tekintettel; hiszen a különleges tehetséggel rendelkező növendékek úgy is fokozottabban fejtik ki lelki erejüket a tehetségüknek megfelelő területen, mint az átlagosak. Ezen átlagszerpontok vezérlő elvei alapján állították össze a matematikai tantervet is, a hivatalos tantervi utasítások pedig teljesen megfelelnek az itt felsorakoztatott véleményeknek: a matematika-tanítás vezérlő elve a függvény-gondolat kialakítása és a tanítási eljárásban is mindenkor tekintettel kell lennie a tanárnak a matematikai gondolkodás alapvető természetére (viszonyító érzék stb.).

A matematikai képességeket kutató vizsgálatok természetesen szintén értékes anyagot szolgáltatnak a pedagógia számára. Az itt összegyűjtött vizsgálatok közül egy-kettőhöz pedagógiai vonatkozású megjegyzéseket is fűztek. Különösen W. Voigt vizsgálataiból vonhatunk le hasznos tanulságokat. Láttuk, ő megállapította, hogy különösen a leányok matematikai gondolkodása a mechanikus eljárás felé hajlik, és hogy a leányok számára fokozottabb mértékben kell alkalmazni a szemléltető eljárásokat. Minden esetre érdekes a pubertásnak a matematikai gondolkodásra gyakorolt befolyása, fontos következtetést ebből annyiban vonhatunk le, hogy tekintettel ennek a befolyásnak a két nemnél való erős különbözőségére, a koedukáció mindenképpen mellőzendő. De le kell vonnunk a következtetést abból a tényből is, hogy a matematikai képesség sokkal izoláltabb a többi képességnél. Az egyébként jóeszű, de matematikailag tehetségtelen tanuló számára bővebb alkalmat kell nyújtani az anyag elsajátítására és különösen arra kell vigyázni, hogy a tanuló számára a 6 éves tananyagának egyetlen láncszeme se essék ki, mert ez későbbi tanulmányaira nézve igen káros kihatással lehet. Az átlag-intelligenciával nem rendelkező, de matematikailag tehetséges tanuló teljesítményeit pedig fokozott mértékben kell értékelni és rá kell bízni a szülőket hogy, gyermekük tehetségét megfelelő életpálya választásával kedvezően kiaknázzák.

A pedagógiai lélektan vizsgálatai természetesen nagylendülettel tovább folynak és fokanként mindinkább világossá teszik az emberi lélek kifürkészetlen területeit. Ezek a vizsgálatok továbbra is igen hasznosak lesznek a nevelés szempontjából és az ifjú nemzedéknek a nemzet szempontjából oly fontos nevelését — hivatásos nevelők közreműködésé-

vel — az egyedül helyes irányba fogják terelni: t. i. képe-  
síteni fogják arra, hogy a növekedő ifjak a velük született  
lelki képességek teljes kifejtésével váljanak a kultúrközös-  
ség produktív tényezőivé.

---

## IRODALOM.

(*Rövidítések:* Ar. G. Ps. = Archiv für die gesamte Psychologie; B. J. Ps. = British Journal of Psychology; J. Ed. Ps. = Journal of Education Psych.; M. Pt. N. = Monatschrift für Psychiatrie und Neurologie; Pd. Ps. Ar. = Pädagogisch-psychologische Arbeiten; Pr. Ps. = Praktische Psychologie; Z. Ang. Ps. = Zeitschrift für angewandte Psychologie; Z. Pd. Ps. = Zeitschrift für pädagogische Psychologie.)

- Atmanspacher O.*: Zahlen- und Rechenpsychologie (Annaberg 1928.)
- Beckmann H.*: Die Entwicklung der Zahlleistung bei 2—6 jährigen Kindern. (Z. Ang. Ps. Leipzig 1922. Bd. 20.)
- Beke E.*: Über mathematische Begabung (Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie. Sonderabdruck 1933.)
- Betz W.*: Über Korrelation. (III. Beiheft zur Z. Ang. Ps. Leipzig 1911.)
- Bobertag—Hylla*: Begabungsprüfung für den Übergang von der Grundschule zu weitführenden Schulen. (Langensalza 1925.)
- Boda I.*: Bevezető a lélektanba. (Szeged 1934.)
- Boda I.*: A következtetőképesség, mint értelemvizsgálati probléma. (Magyar Pszichológiai Szemle 1931.)
- Brandell V. G.*: Das Interesse der Schulkinder an den Unterrichtsfächern. (X. Beiheft zur Z. Ang. Ps. Leipzig 1915.)
- Brown W.*: An objective study of Mathematical Intelligence. (Biometrika, London 1910.)
- Bühler K.*: Die geistige Entwicklung des Kindes. (Jena 1918.)
- Castiello J.*: Geistesformung (Berlin és Bonn 1934.)
- Collar D. G.*: A statistical survey of arithmetical ability. (B. J. Ps. 1921. K. 11.)
- Descoeudres: A.*: Le développement de l'enfant de deux à sept ans (Neuchâtel—Paris 1921.).
- Ebbinghaus H.*: Über eine neue Methode zur Prüfung geistiger Fähigkeiten und ihre Anwendung bei Schulkindern. (Hamburg 1897.)
- Hahn R.*: Mathematische Begabung und Persönlichkeit. (M. Pt. N. Berlin 1927. Bd. 64.)
- Höfler A.*: Didaktik des mathematischen Unterrichts (Leipzig 1911.)
- Huther A.*: Über das Problem einer psychologischen und pädagogischen Theorie der intellektuellen Begabung. (Ar. G. Ps. Leipzig 1910. Bd. 16.)
- Huther A.*: Korrelationen zwischen Zahlengedächtnis und Rechenleistung. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1911. Bd. 12.)
- Hylla E.*: Testprüfungen der Intelligenz. (Braunschweig 1927.)
- Johnson E. P.*: Teaching pupils the conscious use of a technique of thinking. (Mathematics Teacher XVII.)
- Katz D.*: Psychologie und mathematischer Unterricht (Imuk Abhandlungen Bd. 3. Heft. 8. Leipzig és Berlin 1913.)



- Kaufmann—Schmidt*: Zur Prüfung der rechnerischen Denkfähigkeit im Schulkindesalter von 9—12 Jahren (Z. Pd. Ps. Leipzig 1922. Bd. 23.)
- Knight—Setzafand*: Transfer within a narrow mental funktion. (Elementary School Journal. 1924. Sz. 24.)
- Kohn—Schächter*: Der Zahlenreihentest. Untersuchungen über das arithmetische Denken 12—14 jähriger Knaben. (Z. Ang. Ps. Leipzig 1926. Bd. 26.)
- Kommerell V.*: Über mathematische Begabung (Z. Pd. Ps. Leipzig 1928. Bd. 29.)
- Köhler G.*: Experimentell-pädagogische Untersuchung über die Entwicklung der mathematischen Kritikfähigkeit (Z. Pd. Ps. Leipzig 1924. Bd. 25.)
- Kroh O.*: Eine einzigartige Begabung und deren psychologische Analyse. (Göttingen 1922.)
- Leipziger Lehrerverein*: Anweisungen für die psychologische Auswahl der jugendlichen Begabten. (Pd. Ps. Ar. Leipzig 1921. Bd. 11.)
- Liedloff W.*: Beiträge zur Psychologie der mathematischen Schulbegabung (Jenaer Beiträge zur Jugendpsychologie 6. 1928.)
- Lietzmann W.*: Methodik des mathematischen Unterrichts (három kötet, Leipzig 1919, 1925, 1926.)
- Lobsien M.*: Korrelationen zwischen Zahlengedächtnis und Rechenleistung. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1911. Bd. 12.)
- Mercante V.*: Enseñanca de la Aritmetica libro I: Psicologia de la Aplitud matematica del nino. (Buenos Aires 1904.)
- Meumann E.*: Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik und ihre psychologischen Grundlagen (három kötet, Leipzig 1920—22.)
- Möbius P. J.*: Über die Anlage zur Mathematik (Ausgewählte Werke, Bd. 8. Leipzig 1907.)
- Müller G. E.*: Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes. (Zeitschrift für Psychologie 5. pótkötet, Leipzig 1911.)
- Oehl W.*: Psychologische Untersuchungen über Zahlendenken und Rechnen bei Schlangfängern. (Z. Ang. Ps. Leipzig 1935. Bd. 49.)
- Overman J. R.*: An experimental study of certain factors affecting transfer of training in arithmetic (Baltimore 1931.)
- Pauli R.*: Beiträge zur Psychologie des Rechnens. (Ar. G. Ps. Leipzig 1927. Bd. 59.)
- Peters W.*: Begabungsprobleme. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1925. Bd. 26.)
- Poffenberger A. T.*: The influence of improvement in one simple mental process on other related processes (J. Ed. Ps. 1915. Sz. 6.)
- Poincaré H.*: Wissenschaft und Hypothese. (Fordította Lindemann F. és L., Leipzig 1914.)
- Poincaré H.*: Der Wert der Wissenschaft. (Fordította Weber E., Leipzig 1921.)
- Ranschburg P.*: Az emberi elme. (Két kötet, Budapest, 1923.)
- Révész G.*: A tehetség korai felismerése. (Budapest 1918.)
- Révész G.*: Prüfung der rechnerischen Fähigkeit und Fertigkeit (Z. Ang. Ps. Leipzig 1930. Bd. 36.)

- Rose G.*: Die Schulung des Geistes durch den mathematischen Unterricht (XI. Beiheft zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 1928.)
- Rugg W. O.*: The experimental determination of mental discipline in school studies (J. Ed. Ps. 1917. Sz. 8.)
- Ruthe P.*: Über mathematische Begabung, ihre Analyse und ihre Prüfung bei 13-jährigen begabten Volksschülern. (Pr. Ps. 1920. Bd. 1.)
- Schanoff B.*: Die Vorgänge des Rechnens. (XI. Band der pädagogischen Monographien von E. Meumann, Leipzig 1911.)
- Schieke K.*: Begabungsgruppenbildung von Schulneulingen auf Grund der Zahlauffassung. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1927. Bd. 28.)
- Schlüssler H.*: Experiment und Lehrerurteil (Z. Pd. Ps. Leipzig 1922. Bd. 23.)
- Schlüssler—Schwarzhaupt*: Die pädagogische und experimentell-psychologische Auslese der Begabten für die Übergangsklasse II. in Frankfurt a. M. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1921. Bd. 22.)
- Seemann J.*: Untersuchungen über die Psychologie des Rechnens (Ar. G. Ps. Leipzig 1929. Bd. 69.)
- Starch D.*: Transfer of training in arithmetical operations (J. Ed. Ps. 1911. Sz. 2.)
- Stern W.*: Differentielle Psychologie. (Leipzig 1911.)
- Stern W.*: Die Intelligenz der Kinder und Jugendlichen und die Methoden ihrer Untersuchung (Leipzig 1920.)
- Stern W.*: Zur Theorie der Intelligenz (Z. Pd. Ps. Leipzig 1928. Bd. 29.)
- Stern—Wiegmann*: Methodensammlung zur Intelligenzprüfung von Kindern und Jugendlichen. (20. Beiheft zur Z. Ang. Ps. Leipzig 1926.)
- Stone W. C.*: Arithmetical abilities and some factors determining them. (New-York 1908.)
- Szondi L.*: A tehetség biológiája. (Előadás. Tehetségproblémák, Budapest 1930.)
- Thomson G. H.*: The Northumberland mental tests. (B. J. Ps. London, Cambridge 1921. Sz. 12.)
- Thomson G. H.*: Age standards for the separate Northumberland Tests. (B. J. Ps. London, Cambridge 1922. Sz. 12.)
- Thorndike—Fox*: The relationship between the different abilities involved in arithmetic (Columbia University Contributions to Philosophy, Psychology and Education XI.)
- Treutlein P.*: Der geometrische Anschauungsunterricht (Leipzig 1911.)
- Vaërting M.*: Neue Wege im mathematischen Unterricht. (Berlin 1921.)
- Várkonyi H.*: Közlemények a szegedi Ferencz József-Tudományegyetem pedagógiai-lélektani intézetéből. (Acta litterarum ac scientiarum reg. Universitatis hung. Francisco Josephinae, Sectio Philosophica. Szeged 1934.)
- Voigt W.*: Über das logisch-rechnerische Denken der Zehn- bis Zwanzig-jährigen auf Grund experimenteller Untersuchungen (Z. Pd. Ps. Leipzig 1919. Bd. 20.)
- Voigt W.*: Untersuchungen über das anschaulich-geometrische Denken der Zehn- bis Zwanzigjährigen. (Z. Pd. Ps. Leipzig 1921. Bd. 22.)

- Voigts H.*: Untersuchungen über die Entwicklung der mathematisch-rechnerischen Denkfähigkeit bei Mädchen. (Z. Pd. Ps. Leipzig, 1926. Bd. 27).
- Weszely Ö.*: A korszerű nevelés alapelvei. (Budapest 1935.)
- Wilhelm H.*: Beiträge zur Begabungspsychologie auf Grund des Lehrerurteils. (Z. Ang. Ps. Leipzig 1921. Bd. 19.)
- Winch W. H.*: The transfer of improvement in reasoning in schoolchildren. (Br. J. Ps. 1922—23. Sz. 13.)
- Winkler H.*: Tests für das mathematische und naturwissenschaftliche Gebiet. (Pd. Ps. Ar. Leipzig 1924. Bd. 13.)
- Ziehen Th.*: Über das Wesen der Veranlagung und ihre methodische Erforschung. (Langensalza 1918.)
-

E dolgozat szerzője 1913. szept. 29-én született, Budapesten; Elemi iskolai tanulmányait a Budapesti községi érsek-utcai elemi iskolában, középiskolai tanulmányait a Budapesti VII. ker. m. kir. áll. „Madách Imre” gimnáziumban végezte, ahol 1931 júniusában érettségi bizonyítványát szerezte. Egyetemi tanulmányait a Budapesti kir. magy. Pázmány Péter-Tudományegyetemen végezte, és egyidejűleg a Budapesti m. kir. Középiskolai Tanárképzőintézet matematika-fizika szakcsoportú tagja volt. 1936 májusban a Budapesti áll. Középiskolai Tanárvizsgáló Bizottságnál letett vizsgálatok alapján tanári oklevelet nyert. A dolgozat szerzője hálás köszönettel tartozik dr. Várkonyi Hildebrand professzor úrnak, aki becses útmutatásaival és tanácsaival segítette.

## Tartalomjegyzék.

Bevezetés — — — — —	3
I. A MATEMATIKAI KÉPESSÉG LÉLEKTANA:	
1. Általános és speciális intelligencia — — — — —	5
2. Képesség és tehetség — — — — —	9
3. Matematikai képesség és tehetség — — — — —	13
II. KISÉRLETI VIZSGÁLATOK:	
1. A tesztekéről általában. A matematikai képességek tesztjei — — — — —	24
2. Vizsgálati eredmények — — — — —	39
A) A matematikai képesség exisztenciális vizsgálata	39
B) A matematikai képességek fejlődésére vonatkozó vizsgálatok — — — — —	49
3. Pedagógiai vonatkozások — — — — —	64
Irodalom — — — — —	67







